数学の基礎訓練 III
～線形代数編～

平成 27 年 12 月 15 日版　西井 淳

1　ベクトルについて

物の重さのように**大きさ**のみをもつ量を**スカラー**とよぶ。英語表記は **scalar** であり,「秤」や「目盛」を意味する scale と語源は同じである。一方、速度のように**向き**と**大きさ**をもつ量を**ベクトル**と呼ぶ。ベクトルの英語表記は **vector** であり，語源はラテン語で「運ぶ者」を意味する vectum である。

ベクトルは高校の教科書では $\vec{x}$ のように矢印を用いて表記されるが，高校の教育課程以外では矢印を用いず $\boldsymbol{x}$ と太字で表記することが多い。ベクトルを座標で表記する方法には，**縦ベクトル** (**列ベクトル**, column vector)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を用いる方法と**横ベクトル** (**行ベクトル**, row vector)

$$\boldsymbol{x} = (x, y)$$

を用いる方法があるが，**本稿では特に明記しない場合には縦ベクトルを意味する**ものとする。

2　スカラー積とベクトル積

2.1　スカラー積

２つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の**スカラー積** (**内積**, scalar product) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ を次式で定義する[注 1]。

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$$

ここで，θ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ がなす角である。なお，スカラー積は $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ と書くこともある。

問 1 この定義に基づいて以下の各式を証明しなさい (分配則の証明には図 1 を参照)。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} && (\text{交換法則}) \\ c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) &= (c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} && (\text{結合法則}) \\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} && (\text{分配法則}) \end{aligned}$$

問 2 以上を用いて次の問に答えなさい。

(1) 直交する２つのベクトルのスカラー積の値を答えなさい。

[注 1] スカラー積という名前は，積の値がスカラーであることによる。

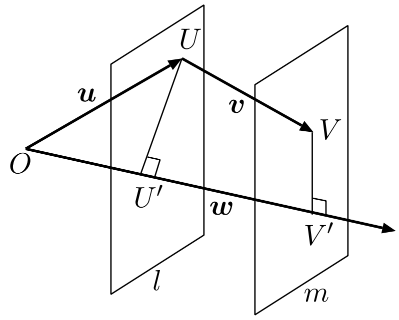

図 1　スカラー積の分配法則 $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ の証明のヒント。平面 l は点 U および点 U からベクトル $\boldsymbol{w}$ におろした垂線の足 U' を含み，ベクトル $\boldsymbol{w}$ と垂直である。同様に，平面 m は点 V および点 V からベクトル $\boldsymbol{w}$ におろした垂線の足 V' を含み，ベクトル $\boldsymbol{w}$ と垂直である。$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ の値がそれぞれどのようになるかを考えてみよう。

(2) $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ に対するスカラー積 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}$ 等はどのような値になるかを内積の定義に従って説明せよ。

(3) $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$ をそれぞれ基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の線形和で表しなさい。

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のスカラー積が次式で与えられることを前問の結果を用いて証明しなさい。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

2.2　ベクトル積

２つのベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して以下を満たすベクトル $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の**ベクトル積** (**外積**, vector product) とよび，$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ で表す[注 2]。

(1) $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta$

(2) $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に垂直であり，その向きは $\boldsymbol{u}$ から $\boldsymbol{v}$ の方向に 180° 以内の角度で回転したときに右ネジがすすむ向き。

ここで，θ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ がなす角である。

問

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のベクトル積の大きさ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を２辺とする平行四辺形の面積に等しいことを説明しなさい。

[注 2] ベクトル積という名前は，積がベクトルであることによる

(2) ベクトル積に関しては以下が成り立つ。

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} \qquad \text{(交換法則)}$$
$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w} \qquad \text{(分配法則)}$$

(a) 交換法則が成り立つことをベクトル積の定義に従って説明しなさい。

(b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が同一平面上にあるとき分配法則が成り立つことを、定義に従って幾何学的に証明しなさい。問 (1) の結果を用いると簡単に証明できる。

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ について以下に答えなさい。

(a) ベクトル積の定義によると $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$ 等はどのような値になるかを説明せよ。

(b) 基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ にそれぞれ平行な $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して分配法則が成り立つことを、定義に従って幾何学的に証明しなさい。

(4) $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b, z_b)$ のとき，ベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，行列式を用いて以下のように表されることを証明せよ。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{i}(y_a z_b - z_a y_b) + \boldsymbol{j}(z_a x_b - x_a z_b) + \boldsymbol{k}(x_a y_b - y_a x_b)$$

ここで，$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ である。

(5) 前問の結果を用いてベクトル積に関する交換法則と分配法則が三次元ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ について一般に成り立つことを証明しなさい。

(6) $\boldsymbol{A} = (1, 1, 0)$ と $\boldsymbol{B} = (0, 1, 1)$ を 2 辺とする三角形の面積を，ベクトル演算に関する知識を用いて求めよ。

2.3 練習問題

問 1 以下の質問に答えなさい。

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のなす角 θ を求める方法を，以下の 2 通りの方法で説明せよ。

(a) スカラー積を用いる方法

(b) ベクトル積を用いる方法

(2) ベクトル $\boldsymbol{A} = (1, 1, 0)$ と $\boldsymbol{B} = (0, 1, 1)$ のなす角を上記の 2 つの方法で求めてみよ。

問 2 ある物体が一定の力 $\boldsymbol{F}$ を受けながらある直線上を動いた。その変位ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき，力 $\boldsymbol{F}$ が物体に対してした仕事は W は次式で与えられる。

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} \tag{1}$$

水平面に対しての傾斜角が 30° のなめらかな平面上にある物体が斜面に沿って L だけすべり落ちた。

(1) 水平面を x 軸、鉛直面を y 軸とする座標系を定義して，重力ベクトル $m\boldsymbol{g}$ および物体の斜面にそった変位を表すベクトル $\boldsymbol{l}_g$ を各座標成分で表しなさい。

(2) 斜面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとる座標系を定義して，重力ベクトル $m\boldsymbol{g}$ および物体の斜面にそった変位を表すベクトル $\boldsymbol{l}_s$ を各座標成分で表しなさい。

(3) 重力が物体にした仕事 W を式 (1) に基づいて求めると，その値は上記 2 つのいずれの座標系を用いても同じになることを示しなさい。

問 3 ある物体が xy 平面内で、原点を中心とする半径 1 の円周上を角速度 ω で動いている。この物体の位置を $\boldsymbol{r} = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ で表す。

(1) この物体の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ を求め，$\boldsymbol{r}$ と $\dot{\boldsymbol{r}}$ が直交していることを示しなさい。

(2) $\dot{\boldsymbol{r}}$ を $\boldsymbol{r}$ とともに 3 次元 xyz 空間内に図示しなさい。

(3) この物体の運動の回転軸は z 軸と一致する。この回転軸方向と角速度の大きさをベクトル $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ で表すと，次式が成り立つことを示しなさい。

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2}$$

3　直線と平面

3.1　直線の方程式

ある点 (位置ベクトル $\boldsymbol{p}$) と方向ベクトル $\boldsymbol{u}(\neq 0)$ に対して，次式を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合を**直線** (straight line) という [注3]。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \lambda \boldsymbol{u} \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \tag{3}$$

問

(1) 式 (3) の意味を図を書いて説明せよ。

(2) ２次元 xy 空間において $\boldsymbol{p} = (a, b)$ を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{u} = (u, v)$, $(u \neq 0, v \neq 0)$ である直線を考える。直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x, y)$ とすると，式 (3) を以下のように書き換えることができることを示しなさい。

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v}$$

(3) ３次元 xyz 空間において $\boldsymbol{p} = (a, b, c)$ を通り，方向ベクトルが $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, $(u \neq 0, v \neq 0, w \neq 0)$ である直線を考える。直線上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とすると，式 (3) を以下のように書き換えることができることを示しなさい。

$$\frac{x-a}{u} = \frac{y-b}{v} = \frac{z-c}{w}$$

練習問題 以下の条件を満たす直線の方程式を書きなさい。

(1) 点 $(4, 3)$ を通り，方向ベクトルが $(2, 3)$

(2) 点 $(4, 3)$ を通り，方向ベクトルが $(2, 0)$

(3) 点 $(6, 6, 1)$ を通り，方向ベクトルが $(2, 3, 4)$

(4) 点 $(6, 6, 1)$ を通り，方向ベクトルが $(2, 3, 0)$

(5) 点 $(6, 6, 1)$ を通り，方向ベクトルが $(2, 0, 0)$

[注3] これは直線の定義の一例

3.2　平面の方程式

ある点 (位置ベクトル $\boldsymbol{p}$) と法線ベクトル $\boldsymbol{t}(\neq 0)$ について，次式を満たす点 $\boldsymbol{x}$ の集合を**平面** (plane) という [注4]。

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) \perp \boldsymbol{t} \tag{4}$$

問

(1) 式 (4) の意味を図を書いて説明せよ。

(2) 平面の定義に基づいて，次式が点 (x_0, y_0, z_0) を通り，法線ベクトルが (a, b, c) である平面であることを説明せよ。

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

解説 n 次元空間で定義される方程式

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = d$$

が表す図形のことを，$n = 2$ のとき**直線**，$n = 3$ のとき**平面**，$n \geq 4$ のときには**平面**もしくは**超平面** (hyper plane) とよぶ。

練習問題

(1) 以下の各式で表される平面の法線ベクトルを言いなさい。

　(a) $x + 2y + 3z = 6$

　(b) $x + 2y = 6$

　(c) $x = 6$

(2) 法線ベクトル $\boldsymbol{t}$ と，通る点 $\boldsymbol{p}$ が以下のように与えられる平面の方程式をそれぞれ書きなさい。

　(a) $\boldsymbol{t} = (1, 3, 2)$，$\boldsymbol{p} = (4, 2, 7)$

　(b) $\boldsymbol{t} = (1, 3, 0)$，$\boldsymbol{p} = (4, 2, 7)$

　(c) $\boldsymbol{t} = (0, 3, 0)$，$\boldsymbol{p} = (4, 2, 7)$

　(d) y 軸の向きを法線とし，点 $(1, 2, 3)$ を通る。

[注4] これは平面の定義の一例

3.3 練習問題

次の各式がどのような図形を表すかを理由とともに述べて，そのグラフを書きなさい。

(1) $y = 2x + 1$ (2 次元)

(2) $x + y + z = 1$

(3) $2y + z = 1$

(4) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{3}$

(5) $x = 1$ (2 次元)

(6) $x = 1$ (3 次元)

(7) $x = 1, y = 0$ (3 次元)

(8) $|x| + |y| + |z| = 1$

解説 グラフを描く時には以下に気をつけること。

(1) 座標軸の原点を明示する。

(2) 各座標軸の名前を書く。

(3) 各座標軸の正の方向を明示する。

(4) 3 次元グラフの座標軸の z 軸の向きは x 軸と y 軸の向きにより一意に決まることに気をつける。

(5) グラフには，もとの式を推定できる情報をできるだけ書く。

(6) 図にうまく書けない情報があれば文字でも補う。

4 ベクトル空間の基礎知識

4.1 ベクトル空間と一次独立

(1) 「ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が一次従属である」とは，どういう意味か。例をあげ，また図示して説明せよ。

(2) 「ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次従属である」とは，どういう意味か。例をあげ，また図示して説明せよ。

(3) 「ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が一次独立である」とはどういう意味か説明せよ。

(4) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の一次結合 $c\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{b}$, ($c, d$ は定数) で与えられる空間を「ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る空間」という。以下の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る空間 W について，以下の問に答えよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) W はどんな空間か? 図示して説明せよ。

(b) ベクトル空間 U の中に r 個の一次独立なベクトルが存在し，かつ $r+1$ 個以上の一次独立なベクトルは存在しないとき，U の次元は r であるといい，$\dim U = r$ と書く。$\dim W$ の値は?

4.2 Gram-Schmidt の直交化

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \cdots$ が次式を満たすとき

$$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij} \tag{5}$$

「ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \cdots$ が**正規直交系**（orthonormal）をなす」という。ここで，δ_{ij} は**クロネッカーのデルタ** (Kronecker's delta) [注 5]。である。

一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \cdots$ があるとき，これらのなす空間において正規直交系を成すベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}, \hat{\boldsymbol{c}}, \cdots$ をつくる方法を **Gram-Schmidt の直交化**という。

問 1 以下の問に答えなさい。また各計算過程を幾何学的に説明しなさい。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ を正規化したベクトル $\hat{\boldsymbol{a}}$ を求めなさい。

(2) ベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\hat{\boldsymbol{a}}$ に射影したベクトル $\boldsymbol{b}_a$ を求めなさい。

(3) ベクトル $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_a$ を規格化したベクトルを $\hat{\boldsymbol{b}}$ とおく。$\hat{\boldsymbol{b}}$ を求め、$\hat{\boldsymbol{a}}$ と直交することを確認しなさい。

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ を $\hat{\boldsymbol{a}}$ および $\hat{\boldsymbol{b}}$ に射影したベクトル $\boldsymbol{c}_a$, $\boldsymbol{c}_b$ をそれぞれ求めなさい。

[注 5] クロネッカーのデルタ δ_{nm} とは以下で定義される。$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$

(5) ベクトル $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}_a - \boldsymbol{c}_b$ を規格化したベクトルを $\hat{\boldsymbol{c}}$ とおく。$\hat{\boldsymbol{c}}$ を求め、$\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}$ と直交することを確認しなさい。

問 2 以下のベクトルに対して Gram-Schmidt の直交化を行い，正規直交系を得なさい。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.3　ベクトルと定性的表現

以下の**定性的表現**に対応する図 (**幾何学的表現**) を書きなさい。またベクトルを用いたできるだけ簡単な式 (**定量的表現**) で表しなさい

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が直交している。

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が平行である。

(3) 3 点 A,B,C が一直線上にある。

5　行列の基礎知識

5.1　行列の基本演算

(1) 以下の計算をせよ。

(a) $$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) $$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 P,Q を以下のように定める。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

以下を求めよ。

(a) $P - Q$

(b) PQ

(c) QP (行列式の積の順番は交換できない！)

5.2　トレース

n 次正方行列 $A = \{a_{ij}\}$ の対角成分の和を A の**トレース** (trace) と呼び，$\mathrm{tr}A$ と書く。すなわち，

$$\mathrm{tr}A = \sum_i^n a_{ii}$$

問 n 次正方行列 $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ について以下が成立することを証明しなさい。

(1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B$

(2) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

5.3　転置行列と対称行列

ある行列 A の**転置行列** (transpose matrix) は A^T, A^t, ${}^tA$ 等で表される。A^t という記述を見たときには，転置行列か t 乗のことかよく気を付ける必要がある。また，$A^T = A$ を満たす行列を**対称行列** (symmetric matrix) と呼ぶ。定義より明らかなように対称行列は正方行列である。

問

(1) 正方行列 P, Q について次式が成り立つことを証明しなさい。

$$(PQ)^T = Q^T P^T$$

また、前問の行列 P, Q を用いてこのことを証明しなさい。

(2) 任意の $n \times m$ 行列 R に対して，$R^T R$ が必ず対称行列になることを証明しなさい。

5.4　ベクトル演算と行列演算 *

ベクトルを 1 行もしくは 1 列の行列とみなすと，ベクトルの演算を以下のような行列の演算として書くことができる。

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$$
$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$$

問 次式について以下の問に答えなさい。

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T)\boldsymbol{z}$$

(1) $\boldsymbol{x} = (1,2)^T$, $\boldsymbol{y} = (3,2)^T$, $\boldsymbol{z} = (1,3)^T$ の場合について上の結合法則が成り立つことを証明しなさい。

(2) 一般に $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V^n$ [注 6] に対して上式が成り立つことを証明しなさい。

(3) より一般に，任意の行列 A,B,C の演算において

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つことを証明しなさい。

6　一次写像，一次変換 (線形変換)

$n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し，写像 $f : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$, ($\boldsymbol{x} \in V^m$) は，V^m から V^n への写像となる。このような写像を**一次写像** (linear map) という [注 7]。特に $n = m$ のとき，つまり同じ次元のベクトル空間内の変換のことを**一次変換 (線形変換)** (linear transformation) ともいう。また，この写像 f によって $\boldsymbol{x}$ が写る点 $A\boldsymbol{x}$ を、$\boldsymbol{x}$ の一次写像 f による**像** (image) と呼ぶ。

6.1　一次変換

以下のような**一次変換**を考えてみよう。

$$\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この変換による $\boldsymbol{x}$ の像を $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y})^T$ とおくと ($\tilde{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$)、上式は次のように書くことができる。

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

よって A による一次変換による像は 2 つの一次独立なベクトルの張る空間、すなわち 2 次元ベクトル空間 (V^2) 全体であることがわかる。

次の行列による一次写像で，点 $(x, y)^T$ はどのような点に変換されるか図示して説明しなさい。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.2　拡大・回転

問 2 次元平面内の点 P を位置ベクトル $\boldsymbol{p} = (x, y)^T$ で表す。

(1) 平面内の点 P の x 座標の値のみを, a 倍に引き延ばす変換行列 $M_x(a)$ を示せ。すなわち，次式をみたす行列 M_x を求めよ。

$$\boldsymbol{q} = M_x(a)\boldsymbol{p}, \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{q} = (ax, y)^T$ である。

(2) 平面内の点 P の y 座標の値のみを, a 倍に引き延ばす変換行列 $M_y(a)$ を求めよ。

(3) 平面内の点 P を原点のまわりに，角度 θ だけ反時計方向に回転する行列を $R(\theta)$ 求めよ。

6.3　行列の階数

(n, m) 行列 $A = (a_{ij})$ により，一次写像 $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が与えられたとする。行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in V^m$ の一次写像 $\boldsymbol{f}$ による**像**は次式のようになる。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a_1} + \cdots + x_m\boldsymbol{a_m} \tag{8}$$

よって A による像 $A\boldsymbol{x}$ は A の列ベクトルの張る空間 ($C(A)$ で表す) の中にある ($A\boldsymbol{x} \in C(A)$) ことがわかる。

また，この像の次元 $\dim \boldsymbol{f}(V^m)$ を一次写像 $\boldsymbol{f}$(または行列 A) の**階数**といい，$\mathrm{rank}\boldsymbol{f}$ (または $\mathrm{rank}A$) と表す。$\mathrm{rank}A$ は上式より，A の列ベクトル $\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}$ のうち一次独立な最大個数であるといえる。

[注 6] V^m は m 次元**ベクトル空間**を指す。特に**実ベクトル空間**を指すときには R^m, **複素ベクトル空間** を指すときには C^m と書く。
[注 7] より正確には任意の m 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ とスカラー c, c_1, c_2 に対して $f(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}) = f(\boldsymbol{a_1}) + f(\boldsymbol{a_2})$ および $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$ を満たす写像 f を**一次写像 (線形写像)** という

(1) 問 6 の各行列の階数を求めよ。

(2) 以下の行列の階数 (rank) を求めよ。

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7　ガウスの消去法・逆行列

7.1　Gauss の消去法

次の方程式について以下の問に答えなさい。

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases} \tag{9}$$

上式は行列を用いて以下のように書くこともできる。

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

上の A のように連立方程式の係数を表す行列を**係数行列** (coefficient matrix) という。上式の解を（行列の）Gauss の消去法によって求めなさい。

解説 Gauss の消去法とは，連立方程式を解くときに式同士の演算によって変数の数を順に減らしていく方法である。計算は、しばしば各変数の係数と定数項のみを書いて行う。上記の方程式であれば係数行列に右辺の定数項を加えた以下のような**拡大係数行列** (augumented matrix) をまず書く。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \tag{10}$$

この行列に対して行える演算は以下の通りである。(連立方程式の解を求める過程をよく思い出すこと）

- ある行の値を (まとめて) 何倍かする。(ある式の両辺を何倍かする）
- ある行から別の行を引く。（式同士の加減算）
- 2つの行を入れ替える。（式の順序の変更)

この演算を用いて，行列 (10) を変形していこう。まず，2 行目以降の各行の第一項が 0 になるように，1 行目を必要に応じて何倍かしたものを引く。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

次に第 2 行の先頭要素 (2 列目) が 1 になるように，第 2 行を適当な数で割る。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

さらに，第三行目を 2 で割る。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

このように**三角行列** (triangular matrix) もしくは**階段行列** (echelon matrix) に変形過程を**前進差分** (forward elimination) とよぶ。これによって $z=1$ を得たことになる。さらに，この解を順次代入 (**後退代入**, back-substitution) していくことによって他の解も求めることができる。この過程を**後退消去** (backward elimination) と呼ぶ。上記の例では，第一行目の値から第三行目および第二行目の値を引くことによって次式のような形が得られる。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

ここで，a, b, c は演算によって得られる定数である。上の拡大係数行列は次式を意味する。

$$I\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}', \quad \boldsymbol{b}'=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

これは式 (9) と等価であることから，解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}'$ をただちに得ることができる。

7.2 逆行列

正方行列 A に対して

$$AX = XA = I \tag{11}$$

が成り立つ行列 X が存在するとき，X を A の**逆行列** (inverse matrix) と呼び，A^{-1} で表す。また，逆行列をもつ行列を**正則行列** (non-singular matrix) といい，もたない行列を**非正則行列** (singular matrix) という。

正則行列 A を係数行列とする連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{12}$$

があるとき，その解はただちに

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{13}$$

と求めることができる。

(1) ある行列 A に対して $AX = YA = I$ が成り立つ行列 X, Y が存在するならば、$X = Y$ であることを証明しなさい。(ヒント:行列の積に対して結合則 $A(BC) = (AB)C$ が成り立つことを用いよ)

解説 Aが正方行列でない場合には $AX = XA = I$ を満たす行列 X は存在しない。

(2) 正則行列 P,Q について次式が成り立つことを証明せよ。

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} \tag{14}$$

(3) 正則行列 P について次式が成り立つことを証明せよ。

$$(P^T)^{-1} = (P^{-1})^T$$

(4) 正方行列 U の各列ベクトルが正規直交系をなすとき，その行列を**直交行列** (orghogonal matrix) という。直交行列においては $U^{-1} = U^T$ であることを示しなさい。

7.3 逆行列の求め方 (Gauss-Jordan 法)

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることは，以下を満たす行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ の各要素を求めることを意味する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式として書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これを Gauss の消去法でまとめて解く方法には，次の拡大行列の左側の要素を対角化すればよい。

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

よって

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

このように定数項のみが異なる複数の連立方程式をまとめて解く方法を **Gauss-Jordan 法**という。

練習問題 以下の行列の逆行列をそれぞれ求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$

8　連立一次方程式

8.1　斉次方程式 ($Ax = 0$)

次のような方程式の解を求めよう。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問 1 上式を掃き出し法によって変形すると，次式が得られることを示しなさい。

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

解説 行列 A' の単位行列になっている部分に対応する変数 x, y を**ピボット変数** (pivot variables), 第 3 行の要素 0 が並ぶ列に対応する変数 z を**自由変数** (free variables) と呼ぶ。ピボット変数を $\boldsymbol{x}_{pivot}$, 自由変数を $\boldsymbol{x}_{free}$ とおけば、上式を次のように書くことができる。

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad A' = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{pivot} \\ \boldsymbol{x}_{free} \end{pmatrix}$$

ここで、rank$A$=rankA'=rank$I$ なのでピボット変数の数は rank$A$ に等しく、また行列 F は正方行列とは限らないことに注意せよ。

自由変数を任意の値にとれば（パラメータ変数 t 等で表す）、ピボット変数は以下のように求めることができる。

$$\boldsymbol{x}_{pivot} = -F\boldsymbol{x}_{free} \tag{17}$$

問 2 式 (15) の解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい。

問 3 式 (15) の解空間を A の**核** (kernel) もしくは**零空間** (nullspace) と呼び，Ker$A$, Nul$A$, $N(A)$ 等と書く。また，行列 A の行ベクトルが張る空間を $S(A)$ と書くと，$N(A)$ と $S(A)$ はいずれも 3 次元ベクトル空間 V^3 の部分空間であるが, 式 (15) より両者は直交することがわかる。ここで,

$$\dim S(A) = \text{rank}A$$

であり，また

$$\dim N(A) = 3 - \dim S(A) = 3 - \text{rank}A$$

である。以上のことを前問で得られた解について確認せよ。

解説 より一般に nm 行列 A による一次変換 ($A : V^m \mapsto V^n$) に対する**核**は以下のように定義される。

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in V^m | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

一方，$\boldsymbol{x} \in V^m$ が A によって V^n の部分空間に写像されるとき，その部分空間を A の**像**といい，ImA と書く。すなわち，

$$\text{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \in V^n | \boldsymbol{x} \in V^m\}$$

8.2　非斉次方程式 ($Ax = b$)

前問の式 (15) に定数項を加えた次式の解を考えよう。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

ここで定数項が零ベクトルである式 (15) を**斉次方程式**、定数項が非零ベクトルである上式を**非斉次方程式**と呼ぶ。

問 1 斉次方程式（前問）の解を $\boldsymbol{x}_n$ とおくと，非斉次方程式の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_n} + \boldsymbol{x}_p$, ($\boldsymbol{x}_p$ は定ベクトル) という形になることを示しなさい。

解説 斉次解 $\boldsymbol{x}_n$ を方程式 (18) の**一般解** (general solution)，$\boldsymbol{x}_p$ を**特殊解** (particular solution) と呼ぶ。

式 (18) の拡大係数行列は以下の通りである。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Gauss の消去法によって変形すると以下のような形が得られる。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ここで a, b は定数である。(第三行がすべて 0 にならない場合には解が存在しないことに注意せよ)。

上式は以下のように書き直すことができる。

$$A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' \tag{19}$$

$$A' = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{pivot} \\ \boldsymbol{x}_{free} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{pivot} \\ 0 \end{pmatrix}$$

自由変数を任意の値にとれば（パラメータ変数 t 等で表す）、ピボット変数は以下のように求めることができる。

$$\boldsymbol{x}_{pivot} = -F\boldsymbol{x}_{free} + \boldsymbol{b}_{pivot} \tag{20}$$

よって特殊解は，例えば自由変数がすべて 0 の場合 ($\boldsymbol{x}_{free} = \boldsymbol{0}$) を考えると上式よりただちに

$$\boldsymbol{x}_{pivot} = \boldsymbol{b}_{pivot} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{x}_{free} = \boldsymbol{0} \tag{22}$$

と求めることができる。もちろん、$\boldsymbol{x}_{free} = \boldsymbol{0}$ を $Ax = b$ に代入して求めてもよい。

問 2 式 (18) の解を求めなさい。

解説 まとめると，一般に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する場合、その解は以下の手順で求めることができる。(式 (19) のような形式に変換できるときには解は存在する。幾何学的意味はあとで議論する)

(1) 斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 (一般解) を求める。

(2) 非斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解を，自由変数を全て 0 にすることによって求める。

(3) 上記で求めた一般解と特殊解の和が非斉次方程式の解である。

8.3 連立方程式の幾何学的意味

次の各方程式について以下の問に答えなさい。

(a) $x + y = 0$

(b) $x + y = 1$

(c) $x + y + z = 0$

(d) $x + y + z = 1$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(1) 係数行列の rank は?

(2) 拡大係数行列 (非斉次方程式のみ) の rank は?

(3) 例えば (a) は 2 次元平面内の直線上の点が解であることを示している。このように各方程式の解がどのような幾何学的意味をもつかを図示して説明せよ。

(4) 6 節で述べたように，$A\boldsymbol{x}$ は A の列ベクトルの張る空間内の点になる。(e)(f)(g)(h) について、係数行列の列ベクトルと右辺の定ベクトルを図示して，互いにどのような空間配置になっているかを示しなさい。

(5) 解の張る空間は何次元か？

(6) (解が存在するものについては) 解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい。

(7) 解の張る空間と係数行列の行ベクトルの張る空間を図示しなさい。

8.4 連立方程式の解が存在する条件

(1) n 次正方行列 A と n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ の間に以下の関係がある。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

このとき解 $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外に存在するためには「A が正則行列ではない」ことが必要である。その理由を述べよ。

(2) 行列 A と n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$ の間に以下の関係がある。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

(a) 解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための行列 A の条件はなにか? 上式の左辺を式 (8) のように，行列 A の列ベクトルの一次結合として書けることに注意して**幾何学的に**説明せよ。このとき**解は必ずしも一意である必要はない**。

(b) 解 $\boldsymbol{x}$ が**一意に**定まる条件を説明せよ。

9 行列式

9.1 2 次行列の行列式

問 1 連立方程式

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases} \tag{23}$$

の解が以下の形になることを示しなさい。

$$x=\frac{X}{ad-bc},\quad y=\frac{Y}{ad-bc} \tag{24}$$

ここで，X, Y は a, b, c, d で与えられる定数であり $ad-bc\neq 0$ とする。

解説 行列式 (determinant) とは，正方行列 P が**係数行列** (coefficient matrix) となる連立方程式の解が一意に定まる条件を与えるものとして考えられたものであり，式 (24) のように解の一般的表現を表す分数多項式の分母になる。このことから，行列式は行列 P の逆行列を与える一般的表現の分母であると言い替えることもできる。現在行列式の定義は異なった表現がされているが，これについては後でふれる。

行列 P の行列式は $\det P$ や $|P|$ で表す。2 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式は次式となる。

$$\det P=|P|=ad-bc$$

問 2 行列 $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{p}=(a,b)$ と $\boldsymbol{q}=(c,d)$，行列 P の列ベクトルを $\boldsymbol{r}=(a,c)^T$ と $\boldsymbol{s}=(b,d)^T$ とおいて以下の問に答えなさい。

(1) 以下が同値であることを示しなさい。

(a) $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ が平行である。

(b) $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{s}$ が平行である。

(c) $|P|=0$ である。

(2) $|P|\neq 0$ の場合について以下の 3 つの値が互いに等しいことを示しなさい。

(a) $|P|$ の大きさ

(b) ベクトル $\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(c) ベクトル $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{s}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(3) 以上の結果を $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について確認しなさい。

(4) 行列 P に対して

$$PX=I$$

をみたす行列 X が存在する条件が $|P|\neq 0$ であることを幾何学的に説明しなさい。
ヒント) X の各列ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$ とおくと、上式は次式のようになる。

$$P\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad P\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この 2 式を満たす $\boldsymbol{x}_1$,$\boldsymbol{x}_2$ が存在するには、$\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{q}$(または $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{s}$) がどのような幾何学的関係を満たすべきかを考えなさい。

9.2 3 次行列の行列式

3 次正方行列 $P=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ の行列式は次式で与えられる。

$$\det P=a(ei-fh)+b(fg-di)+c(dh-eg)$$

(1) 行列 P の行ベクトルを $\boldsymbol{p}=(a,b,c)$, $\boldsymbol{q}=(d,e,f)$, $\boldsymbol{r}=(g,h,i)$ とおくとき、次式が成り立つことを証明しなさい。

$$\begin{aligned} \det P &= \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) \\ &= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}) \end{aligned}$$

(2) $\det P$ が $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ を 3 辺とする平行 6 面体の体積になることを示しなさい。

(3) ベクトル $\boldsymbol{p} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{q} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{r} = (1,1,1)$ を三辺とする平行 6 面体の体積を以下の 2 通りの方法で求めなさい。

  (a) 底面の面積と高さをかけて求める
  (b) 行列式の計算により求める

9.3　行列式の定義と性質

行列式の一般的な定義は複数あるが、その 1 つは以下を満たすものして定義される。

(1) $\det I = 1$

(2) 行の交換を行うと行列式の符号 ($\pm$) は入れ替わる。

(3) 以下の結合則が成立する。

(a)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ta_{i1} & \cdots & ta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(b)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

問 1 以下が成り立つことを上の定義に基づき証明しなさい。

(4) 行列 A に同じ成分の行が 2 つ以上あれば $\det A = 0$

(5) A のある行の要素が全て 0 であれば $\det A = 0$

(6) A の第 i 行から第 k 行を何倍かしたものを引いて新しい行列を作ってもの行列式は不変

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}-la_{k1} & \cdots & a_{in}-la_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(7) A の行ベクトルが一次従属であれば $\det A = 0$

(8) 三角行列の行列式は、その対角要素の積で表される。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(9) $\det A^T = \det A$
解説 上式より、ここまでに述べた行に対する行列式の性質は，全て列に対しても成立することがわかる。

問 2 上記 (3)(a) の規則を用いて２次正方行列の行列式を以下のように求めることができる。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix}$$
$$= ad - bc$$

同様にして，３次正方行列の行列式を求めなさい。

解説 この結果をより一般的に表すと次のように書ける。

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots a_{1n}C_{1n}$$

ここで C_{ij} は行列 A の成分 a_{ij} の**余因子** (cofactor) であり，これは次式のように行列 A から i 行と j 列

を除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式を表す。

$$C_{ij} = (-)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

問 3 2次正則行列 P,Q について次式が成立することを証明しなさい。

$$|P||Q| = |PQ| \tag{25}$$

証明は後の問で扱うが，この関係式は任意の正方行列について成立する。

問 4 式 (25) を利用し，以下を $\det A$ を用いて表しなさい。

(1) $\det A^{-1}$

(2) $\det A^n$, (n は自然数)

(3) $\det aA$, (a は実数)

練習問題 以下の行列式を求めなさい。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

(6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^4$

(8) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

9.4 行列式と逆行列

問 1 * 正則な正方行列 A について次式が成り立つことを証明しなさい。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}C^T, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

ここで，C は A の余因子 C_{ij} を成分とする行列であり、A の**余因子行列** (cofactor matrix) とよぶ。
ヒント）$AC^T = (\det A)I$ を証明せよ。

問 2 式 (26) より 2次正方行列の逆行列を求めなさい。

問 3 正方行列 P,Q について $|P||Q| = |PQ|$ が成り立つことを証明しなさい。
ヒント）P, Q の逆行列はそれぞれ以下のように書くことができることを用いよ。

$$P^{-1} = \frac{C_P^T}{|P|},\ Q^{-1} = \frac{C_Q^T}{|Q|},\ (PQ)^{-1} = \frac{C_{PQ}^T}{|PQ|}$$

ここで、C_P^T, C_Q^T はそれぞれ行列 P, Q の余因子行列である。

10 固有値と固有ベクトル

10.1 固有値，固有ベクトル

n 次正方行列 A に対して

$$A\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} \tag{27}$$

が成立するとき，λ を A の**固有値** (eigenvalue)，$\boldsymbol{p}$ を固有値 λ に対する A の**固有ベクトル** (eigenvector) と呼ぶ。また，固有値 λ に対する固有ベクトルのはる空間を，固有値 λ に対する**固有空間**と呼ぶ。**固有ベクトルは A による変換により向きを変えず、その大きさの変化が固有値の値で表される**。

上式より

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

が得られるので、$\boldsymbol{p} \in Ker(A - \lambda I)$ である。よって λ の固有空間の次元は $n - \text{rank}(A - \lambda I)$ である。

式 (28) が $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ である解をもつ条件は $(A - \lambda I)$ が非正則であること，すなわち次式を満たすことである。

$$|A - \lambda I| = 0 \tag{29}$$

ここで，

$$f_A(x) = |A - xI| \tag{30}$$

を行列 A の**固有多項式** (eigenpolynominal) もしくは**特性多項式** (characteristic polynominal) とよぶ。すなわち，固有多項式の解を求めることによって固有値は求めることができる。固有多項式は n 次多項式なので，固有値は重複を許せば n 個存在する。

(1) A の異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに一次独立であることを示しなさい。

解説 この結果より A が異なる n 個の固有値をもつなら，その固有ベクトルはベクトル空間 V^n の基底をなすことがわかる。

(2) **A が実対称行列ならば ($A^T = A$)，実固有値のみをもつ**ことを示しなさい。

(3) **A が対称行列ならば ($A^T = A$)，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交する**ことを示しなさい。(ヒント:異なる固有値に対する固有ベクトルの内積が 0 になることを証明する)

(4) 行列 A が固有値 λ を持つとき，$A + nI$ (n は定数) は固有値 $\lambda + n$ を持つことを証明しなさい。

(5) 行列 A が正則でないときには、A は値 0 の固有値を持つことを示しなさい。

解説 固有値 0 に対する固有ベクトルは A の核となる。

(6) 行列 A のトレースは固有値の総和と等しい、すなわち A の固有値を λ_i, $(i = 1, \ldots, n)$ とするならば次式が成り立つことを証明しなさい.

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

(7) 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(8) 固有値が固有多項式の重根として求められる時，固有値が**縮退** (degeneracy) していると言う。縮退する固有値 λ の固有空間の次元は $\dim Ker(A - \lambda I)$ と等しく、縮退によって独立な固有ベクトルの数が減る ($\lambda_1 = \lambda_2$ に対して固有ベクトルが 1 つのみになる等) 場合もある。このことを以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めて確認せよ。なお，縮退する固有値の固有ベクトルは，可能であればその固有空間の正規直交基底になるようにとること。

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

10.2　固有値，固有ベクトルと一次写像

問 1

(1) $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ を互いに直交する単位ベクトルとする。このとき，次のベクトル方程式が円を表すことを説明せよ。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{p_1} + c_2\boldsymbol{p_2}, \quad c_1^2 + c_2^2 = 1$$

(2) $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ を互いに直交する単位ベクトルとし，λ_1, λ_2 を実数 ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) とする。このとき次のベクトル方程式が，$\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ をそれぞれ長軸，短軸の向きとする楕円を表すことを説明せよ。また長軸と短軸の長さの比が $|\lambda_1| : |\lambda_2|$ で与えられることを説明せよ。

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 c_1\boldsymbol{p_1} + \lambda_2 c_2\boldsymbol{p_2}, \quad c_1^2 + c_2^2 = 1$$

(3) 2 次正方行列 A が 2 つの異なる実固有値 λ_1, λ_2, ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$) を持ち，それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ が互いに直交するとする。写像 $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ により，単位円上の点が $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ をそれぞれ長軸と短軸の向きとする楕円上の点に射影されることを示せ。また長軸と短軸の長さに比が $|\lambda_1| : |\lambda_2|$ で与えられることを説明せよ。

(4) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について前問の結果を確認せよ。

(5) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により単位円はどのような図形に変換されるか。固有値や固有ベクトルと変換後の図形との関係を考察しなさい。

(6) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ により単位円はどのような図形に変換されるか。変換後の図形と固有値や固有ベクトルとの関係を考察しなさい。

問 2 2 次元空間内で，原点回りの回転を与える行列の固有値は虚数になることを示しなさい。

11　行列の対角化と座標変換

11.1　行列の対角化

n 次正方行列 A が互いに異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ をもつとする。このとき A は一次独立な固有ベクトルを $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, ..., \boldsymbol{p_n}$ をもつ (10.1 節 (1) 参照)。この行列について以下の問に答えなさい。

問 1 次式が成立することを説明せよ。

$$AP = P\Lambda \tag{31}$$
$$P = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, ..., \boldsymbol{p_n})$$
$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

解説 上式より，行列 A を**対角化** (diagonalization) するには

$$\Lambda = P^{-1}AP \tag{32}$$

を計算すればよいことがわかる。また，式 (31) は，行列 A が固有ベクトルを変換する時には、その向きを変えずに大きさのみを変えることを意味する。

なお、A が対称行列のときには固有ベクトルを規格化してとっておくと P は直交行列になるため、逆行列を簡単に求められるので ($P^{-1} = P^T$) 便利である。

問 2 以上で示したことは，A の固有値 (の一部) が重複する場合でも，互いに一次独立な n 個の固有ベクトルが存在すれば成り立つことを示しなさい。

11.2　行列の対角化と座標変換

A による一次変換

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} \tag{33}$$

によって，$\boldsymbol{x}$ がどのような点 $\boldsymbol{y}$ に写されるかを以下のように考えてみよう。

行列 A が相異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を持つとし，これに対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ とする。$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおき，この行列 P による座標変換

$$\boldsymbol{x} = P\hat{\boldsymbol{x}},$$
$$\boldsymbol{y} = P\hat{\boldsymbol{y}}$$

を考える。

問 1

(1) P が 2×2 行列の場合、$\hat{\boldsymbol{x}} = (1, 0)^T$ や $\hat{\boldsymbol{x}} = (0, 1)^T$ は P によってどのような点 $\boldsymbol{x}$ に写されるだろうか。その写像と行列 P の固有ベクトルの関係に注意して述べなさい。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{x} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \boldsymbol{y} \\
\hat{\boldsymbol{x}} \arrow[r, "\Lambda"] & \hat{\boldsymbol{y}} \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

図 2 行列 A=$P^{-1}\Lambda P$ による一次変換

(2) 式 (33) は次式と等価であることを証明しなさい.

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{y}} &= \Lambda\hat{\boldsymbol{x}} \qquad (34)\\
\Lambda &= \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}
\end{aligned}
$$

(3) 式 (34) は，$\boldsymbol{x}$ に対するどのような一次変換を表しているか ($\hat{\boldsymbol{x}}$ は Λ によってどのような点 $\hat{\boldsymbol{y}}$ に写るのか) を幾何学的に説明しなさい。

(4) 以上の結果をもとに，行列 A はどのような一次変換を表すかを幾何学的に説明しなさい。

問 2 $n \times n$ の行列 A が互いに異なる固有値をもつならば、その固有ベクトル $\{\boldsymbol{p}_i\}$ を用いて任意のベクトル n 次元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を以下のように書くことができる。

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots c_n\boldsymbol{p}_n \qquad (35)$$

ここで、$c_1, c_2, \ldots, c_n$ は定数である。言いかえると，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を、A の固有ベクトルを座標軸とする座標系により $\hat{\boldsymbol{x}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ と表現することができる。

A の固有ベクトルを各要素とする行列 P が、$\hat{\boldsymbol{x}}$ を，もとの (A で変換される前の) 座標表現 $\boldsymbol{x}$ に変換する行列であること、つまり次式が成立することを証明しなさい.

$$\boldsymbol{x} = P\hat{\boldsymbol{x}}.$$

解説 逆に任意のベクトルを、A の固有ベクトルを座標軸とする座標表現に変換する行列は P^{-1} である。

さて、A による一次変換は次式のように書くこともできる (図 2)。

$$A\boldsymbol{x} = P\Lambda P^{-1}\boldsymbol{x} \qquad (36)$$

この式は A による一次変換を以下のように分解できることを示している。

(1) $\boldsymbol{x}$ を，固有ベクトルにそって座標軸をとった座標系に変換する ($P^{-1}\boldsymbol{x}$)

(2) 各固有ベクトル方向に拡大する ($\Lambda P^{-1}\boldsymbol{x}$)

(3) もとの座標系に戻す ($P\Lambda P^{-1}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$)

問 3 行列 A,B が, 固有ベクトルにそった拡大縮小を決める共通の対角行列 Λ を持つとき，すなわち

$$
\begin{aligned}
A &= P\Lambda P^{-1}\\
B &= Q\Lambda Q^{-1}
\end{aligned}
$$

が成り立つとき，A と B は互いに**相似** (similar)、もしくは**同値** (equivalent) であるという。相似な A, B に対して以下を満たす行列 R が存在することを示しなさい。

$$B = RAR^{-1}$$

問 4 $A = P\Lambda P^{-1}$ のとき以下が成り立つことを証明しなさい。

$$\det A = \det(P\Lambda P^{-1}) \qquad (37)$$

練習問題 次のような行列 P, Q, R について以下の問に答えなさい。

$$
P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}
$$
$$
R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}
$$

(1) 各行列の対角化を行いなさい (P,R の固有値，固有ベクトルは問 10.1 ですでに求めているはずである)。

(2) P および Q はどのような一次変換を与えるか、幾何学的に説明せよ。

(3) 行列 A が与える漸化式 $\boldsymbol{x_{n+1}} = A\boldsymbol{x_n}$ を考える。

(a) 行列 P,Q,R の与える漸化式の一般解を求めなさい。

(b) 漸化式にしたがってあるベクトル x が繰り返し射影されるとき，$n \to \infty$ において x はどのような値になるだろうか。その値を各行列の固有値に基づいて説明できることを示しなさい。

11.3 行列の標準形 *

任意の二次正方行列 A は，ある行列 P を用いた変換 $P^{-1}AP$ によって，以下のいずれかの形に変換することができる。

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

これらを二次正方行列の**標準形** (normal form) とよぶ。

行列 A が一次独立な 2 つの固有ベクトルをもつときには (i) の形に変換できることは 11.1 節で既に述べた通りである。

問 1 二次実正方行列 A が複素固有値 $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\omega$, $(\alpha, \omega \in \mathbf{R})$ を持つときには (i) の形式に変換することができる。さらに，実数行列である上記 (ii) の形にも変換できることを示しなさい。
ヒント)$\lambda_{\pm}$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\pm} = u \pm iv$, $(u, v \in \mathbf{R})$ とおき，$A\boldsymbol{u}_{+} = \lambda_{+}\boldsymbol{u}_{+}$ を実部と虚部に分けた連立方程式にすると見通しがよくなる。

問 2 行列 A が重複した 1 つの固有値 λ を持つ場合を考えてみよう。A が一次独立な 2 つの固有ベクトルをもつ場合には，既に述べたように (i) の形式に変換できる。一方，一次独立な固有ベクトルを 1 つのみもつ場合には (iii) の形式に変換できることを以下のように示すことができる。

固有ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とおくと，$\boldsymbol{p}$ と一次独立なベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して

$$A\boldsymbol{q} = c\boldsymbol{p} + d\boldsymbol{q} \tag{38}$$

なる定数 c, d が存在する。

(1) この c, d が以下のように与えられることを示しなさい。

(a) $c \neq 0$

(b) $d = \lambda$
ヒント) $d \neq \lambda$ とすると次式が成り立ち，$d \neq \lambda$ なる固有値が存在することになるので, 題意に矛盾することを示す。

$$A\left(\boldsymbol{q} + \frac{c}{d-\lambda}\boldsymbol{p}\right) = d\left(\boldsymbol{q} + \frac{c}{d-\lambda}\boldsymbol{p}\right)$$

(2) 式 (38) において $\boldsymbol{r} = \frac{1}{c}\boldsymbol{q}$ とおくと次式が成り立つ。

$$\begin{cases} A\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{p} + \lambda\boldsymbol{r} \\ A\boldsymbol{p} &= \lambda\boldsymbol{p} \end{cases}$$

このことを利用してある行列 P によって A を標準系 (iii) に変換できることを示しなさい。

問 3 各標準形によって $\boldsymbol{x} = x(1,0)^T + y(0,1)^T$ がどのようなベクトルに写像されるかを考察することにより，各標準形がどのような一次変換を与えるかを幾何学的に説明しなさい。

練習問題 以下の行列を標準系にしなさい。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

11.4 二次形式

問 以下の方程式をみたす曲線がどのような形をしているかを考えてみよう。

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \tag{39}$$

この式は次のように書くこともできる。

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 8, \tag{40}$$
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = (x, y)^T$$

このように二次の多項式を行列を用いて表したものを**二次形式** (quadratic form) という。

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 と、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を求めなさい。固有ベクトルはノルムが 1 になるように選びなさい。

(2) 行列 A を対角化するベクトルを P とする。座標変換 $\boldsymbol{x} = P\hat{\boldsymbol{x}}$ を行う。P はどのような変換を行う行列か、その幾何学的意味を説明しなさい。

(3) 前問の座標変換によって、式 (40) を変換した方程式

$$\hat{\boldsymbol{x}}^T \Lambda \hat{\boldsymbol{x}} = 8, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\} \tag{41}$$

はどのような形をした曲線か図示して説明しなさい。

(4) 以上の結果より、式 (39) は楕円を表していることを説明しなさい。特に、行列 A の固有ベクトルが上式で表される楕円の主軸の向きを，また，2 つの固有値の比率の平方根が，対応する固有ベクトルの表す軸の長さの比率になっていることに注目し、その理由を座標変換の幾何学的意味を考えて説明しなさい。

11.5　微分方程式の行列を用いた解法

微分方程式

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \tag{42}$$

について以下の問に答えなさい。

(1) $\dot{x} = y$ とおくと，式 (42) を以下のように書けることを示しなさい。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \tag{43}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

(3) 行列 A を対角化する行列 P を求めなさい。

(4) 座標変換 $\boldsymbol{x} = P\hat{\boldsymbol{x}}$ を利用して微分方程式 (43) を以下の形に変形しなさい。

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \Lambda \hat{\boldsymbol{x}}, \quad \Lambda = P^{-1}AP$$

上式より解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は容易に求まる。その結果を利用して解 $\boldsymbol{x}$ を求めなさい。

A　TODO

西井用のメモコーナーです。見ないで下さい (^^);;

(1) 対角化の問題を充実
  (a) 対称行列の対角化
  (b) 固有値が複素数になる場合
  (c) 固有値が縮退する場合
  (d) Jordan 標準形

B　このドキュメントの著作権について

索 引