力学の基礎訓練

2019 年 4 月 16 日版　西井 淳

はじめに

物理には「法則」という言葉がよく出て来る。**「物理法則」**とは「経験上導き出された」ものであり，「物理現象を説明するための原点となるもの」である。よって本質的にその理由の証明はできない[*]。「法則」は議論の出発点となる点で，数学における**「公理」**と似ている[†]。したがって，物理を理解するには，**法則**のもつ意味をよく把握し，そこを出発点として様々な事柄がどのように説明できるのかを体系的に理解することが重要である。

イギリスの物理学者**ニュートン**が 1687 年に「**プリンキピア**」(Principia) に記した重要な力学の法則として三つの運動の法則 (The three laws of motion) がある。

(1) **運動の第一法則 (慣性の法則)**
(2) **運動の第二法則 (運動方程式)**
(3) **運動の第三法則 (作用・反作用の法則)**

これら 3 つの法則に従った物体の運動を研究する学問体系を**ニュートン力学** Newtonian mechanics という。ニュートン力学の体系化にともない，いくつかの法則が派生し[‡]，また，多くの**定義**が生まれた。**定義**とは単なる約束事のことであるが，使われ続けている定義は決していいかげんに定められたものではない。いずれも物理現象の特徴を簡潔に記述・表現するために生まれたものばかりであり，その誕生はしばしば法則の誕生ともからみあっている。

本テキストは，できるだけ各**法則**や**定義**がどのようにからみあって生まれ，また，どのように派生したかがわかるようなテキストを作りたいと思いながら書いている。このため，設問を解いていくことによって物理法則から様々な物理現象を理解していく形式をとった箇所も多い。答を知ることよりも，答を導きそれが正しいか自分で確かめる能力が，物理に限らず実社会のあらゆる分野で求められる。是非自分で答を導く楽しさを味わってほしい。

本テキストで扱う領域は**ニュートン力学**である。**ニュートン力学**を理解するには，**ニュートンの三法則**と**万有引力等をはじめとするいくつかの力の性質**を理解すれば，力学の教科書や参考書にのっている公式を全て数学的に導くことができる。公式を覚えてしまうと何が本質か見にくくなることが多いので，公式は極力覚えずに自分で導く方法を理解するように心がけてほしい。

なお，**物理の初心者の方は，タイトルに * 印がついている節は始めは省いて読んで，だいたいの粗筋を理解したと思った後に * 印の節を読む**ほうが，より内容を理解しやすいだろう。

[*] もしさらに遡って証明ができる根本原理が見つかれば，そちらのほうが厳密な意味での**法則**となる。

[†]「物理法則」は，そこから導き出す事象が自然現象の観察結果と矛盾するときには「法則」の見直しが迫られるという点で「公理」とは異なる。

[‡] 一般に，法則 A から派生した事実 B が法則 A と等価なもの (B から A を導くことができる) ならば，事実 B も法則と呼ばれることが多い。また，例えばエネルギー保存則は，ニュートン力学では派生物とみなすことが出来るが，化学反応や電磁気等の力学以外の現象全てを通じて成立するため**法則**と分類されている。法則とは元来それ以上遡ることはできないものだが，歴史的経緯で，ある法則 A を含むメタな法則 B が後に発見された場合にも，法則 A をマイルストーンとして法則と呼びつづけることは多い。

書籍紹介

本書で参考にした文献は文章中に随時紹介している。その他，力学の入門用の推薦図書を以下に紹介しておく。

- A. アインシュタイン, I. インフェルト,「物理学はいかに創られたか 上巻 (訳：石原 純)」, 岩波文庫, 1939

  古典力学の成立からはじまり，電磁気，光，熱等に関する話まで，歴史的背景とともにやさしく書かれている。
- R. P. ファインマン,「物理法則はいかにして発見されたか (訳：江沢洋)」, ダイヤモンド社, 1968

  ファインマンの講演をまとめたもの。物理の基本法則が，わかりやすい，そして興味深い例とともに語られている。
- D. L. グッドスティーン, J. R. グッドスティーン,「ファインマンさん，力学を語る (訳：砂川重信)」, 岩波書店, 1996

  この本の一章には，ガリレイやケプラー，ニュートンらによる力学の成立過程が大変わかりやすく書かれている。力学という学問体系がどのようなものかを物理初心者が知るためにも大変参考になる。

この文書の著作権について

間違の指摘や加筆修正要望その他楽しい四方山話等の連絡は大歓迎です。

目次

第 1 章

基本単位とその概念

1.1　いろいろな単位系

長さ (距離), **質量**，**時間**といった量の計測の起源は文明の起源とも一致する。しかしその計測のための基準は，文明の発展とともに何度も定義され，近年は物理学の発展とともにさらに修正が加えつづけられている。

多くの国では長さの単位として指や足の長さが使われてきた。例えば，「尺」（しゃく）という漢字は長さを測るために手の指を広げた形に由来し，古代中国における周代 (紀元前 1046 年頃から紀元前 256 年) では約 22.5 cm であった[*] [25]。1 尺の長さは長い歴史の間に長くなっていき[†]，中国では現在 1/3 m($\simeq$ 33.3 cm)，日本では 10/33 m($\simeq$ 30.3 cm) である[‡]。紛らわしいことだが，このように同じ単位名であっても国によってその長さは違う場合がある。1 寸は 1/10 尺であるが，「寸」はもともと手の形に由来する象形文字で，指一本の幅を表していた [25]。アメリカを中心として今も使われている **inch**(インチ) [§] も，もとは親指の幅を基準とする単位であり，現在は 1 inch=2.54 cm である。**feet**(フィート) は文字どおり足の長さを基準とする単位であり，1 feet=12 inch=30.48 cm である。

国によって様々な単位が使われていたり，同じ単位名称なのにその定義が異なっていたりすると貿易等で意思疎通が難しくなる (図 1.1)。そこで，1791 年にフラン

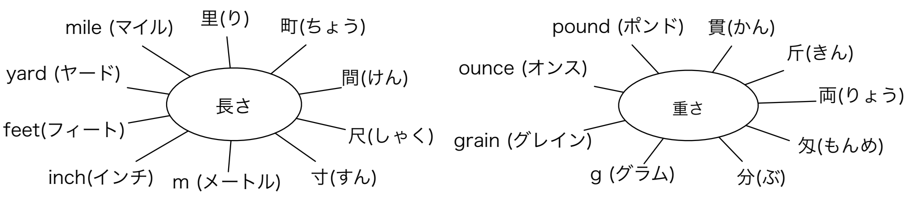


図 1.1　長さと質量の様々な単位の例。MKS 単位系との対応は [34] による。尺貫法 (日本) での長さの単位には 1 尺 ($\simeq$ 30.3 cm)，1 間 = 6 尺 ($\simeq$ 1.818 m)，1 町 = 60 間 ($\simeq$ 109.09 m)，1 里 = 36 町 $\simeq 3,927$ m 等がある。ちなみに中国では 1 里=1/2 km=500 m であり，日本での値と大きく異なる。ヤード・ポンド法による長さの定義では，1 inch= 2.54 cm, 1 feet= 12 inch= 30.48 cm，1 yard= 3 feet= 0.9144 m, 1 mile= 1760 yard= 1609.344 m である。尺貫法 (日本) での質量の定義では，1 匁 = 3.75 g，1 両 = 10 匁 = 37.5 g，1 斤 = 16 両 = 600 g，1 貫 = 6.25 斤 = 3.75 kg であり，ヤード・ポンド法による定義での質量の定義 (国際ポンド) では，1 pound= $0.453,592,37$ kg, 1 ounce= 1/16 pound= $28.349,523,125$ g, 1 grane= 1/7000 pound= $64.798,91$ mg である。

[*] 前腕には尺骨という長い骨があるが，その名前は長さが約 1 尺であることに由来する ([31, p.73])。和楽器の「尺八」の名前は，長さが 1 尺 8 寸であったことに由来する [19]。

[†] 尺の長さが長くなった理由としては，反物等の徴税の際に税を多くとるために，少しづつ長くなったという説がある [1]。

[‡] 尺を長さの単位，貫を質量の単位とする尺貫法と，ヤードを長さの単位，ポンドを質量の単位とするヤード・ポンド法は国際単位系とともに日本でも法的に公式単位として利用されていた。しかし尺貫法とヤード・ポンド法は昭和 26 年に定められた計量法施行法によって猶予期間付き (昭和 33 年 12 月 31 日まで) で廃止され，公式単位はメートル法のみとなった [34]。現在，日本における公式単位は国際単位系に従うことが計量法により定められている [33]。

[§] 古代ローマではフィートがまず定義されて，その 1/12 が inch (ラテン語で「1/12」を意味する uncia が語源) と定義されていたらしい。

スで国際的なメートル法が制定され，新しい長さの単位 [m](meter, メートル) と [g](gramme, グラム) が生まれた。このとき，北極から赤道までの子午線の弧長の 1000 万分の 1 が 1 m，また，1 辺 0.1 m の立方体の水の質量が 1 kg と定められ，この定義に基づいて 1 m の長さを表す**メートル原器**と呼ばれる基準長の物体が作られた。やがて，子午線の長さを正確に図ることは難しいことから，このメートル原器の方が 1 m の定義として用いられようになる。しかし，物質であるメートル原器は当然温度の影響を受けるので，厳密に温度管理が必要になる。また，メートル原器が時間とともになんらかの変化を起こすことがあってはいけないので，どのような物質でどのような形状にして作るかも問題になる。現在では，後述するように光の速度を基準にして 1 m の長さは定義されている。

時間の単位に関しては，日の出から日の入りまでの昼の時間と，日の入りから日の出までの夜の時間をそれぞれ 12 等分する**不定時法**がヨーロッパでは使われていた。この方法では，昼と夜の 1 時間の長さは異なり，その比率は一年を通して変化する。14 世紀はじめにはイタリアで南中時を 12 時として一日を 24 時間に分割する**定時法**が導入され，15 世紀には昼夜の区別無しに常に一定の割合で針を進める機械時計の発達とともに各地に普及していった [28, p.17]。日本でも古くは不定時法が使われており，江戸時代には日の出から日の入りまでの昼の時間と，日の入りから日の出までの夜の時間をそれぞれ 6 等分して時刻を決めていた。機械時計が日本に渡来したのは 1551 年にフランシスコ・デ・ザビエル[*] が 1551 年に周防の領主大内義隆に送ったのが最初とされているが [28, p.47]，ヨーロッパからもたらされた定時法の時計は日本で改良されていき，不定時法に対応できる和時計が開発されていった[†][18, 21]。日本が定時法を導入することになったのは，明治時代に入ってからである [26]。

[*] フランシスコ・デ・ザビエル (Francisco de Xavier, 1506-1552) はナバラ王国 (現スペイン) 出身の宣教師。日本に始めてキリスト教を伝えたとされる。

[†] 簡単なものとしては，季節によって文字盤を取り替えるものがあるが，針の進み方が時刻や時期に応じて変化するものも作られた。

定時法では，上記のように太陽の運行に応じて 1 日という時間の長さが，それを分割することで 1 時間の長さが決まる。さらにこれを分割して分，秒が決められていった。しかし，1 日の長さも厳密には若干変動があることが知られるようになり，後述のように，1967 年にセシウム原子の性質を利用して 1 秒を定義することになった。ただし，このようにして決定した 1 秒を元に 1 年の時間を計算すると，地球の公転の時間とわずかに異なるため，公転に基づく 1 年の時間と，1 秒の定義のズレを補正するために「うるう秒」が数年に 1 度程度導入されている[‡]

[‡] 例えば，2017 年 1 月 1 日午前 9 時の直前に閏秒が挿入された。

1.2　国際単位系

現在は，世界標準とする単位系として**国際単位系** (**SI** [§]) が定められている。**長さ (距離)**，**質量**，**時間**の単位をそれぞれ [m](meter), [kg](kilogramme), [s](second) で記述する単位系を **MKS 単位系**とよぶが，**国際単位系 (SI)** ではこの MKS 単位系に，**電流** [A], **熱力学的温度** [K], **物質量** [mol], **光度** [cd] を加えたものである。

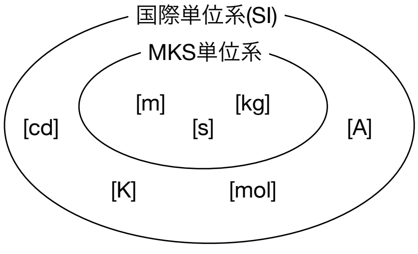


図 1.2　国際単位系 (SI)

[§] フランス語で Le Système International d'Unités の省略形。英語では The International System of Units.

「時間」「質量」「長さ」の定量的定義は国際単位系により，2019 年 4 月時点では

以下のように定義されている [22]。

- 1 秒はセシウム 133 原子（133Cs）の基底状態にある二つの超微細準位間の遷移に対応する放射の 9,192,631,770（約 100 億）周期にかかる時間。
- 1 メートルは，1 秒の 299,792,458 分の 1 の時間（約 3 億分の 1 秒）に光が真空中を伝わる距離。この定義により，光の速さは正確に 299,792,458 m/s になる。
- 1 kg はパリにある「**キログラム原器**」の質量。**質量**の意味の定義は 3.4 節で行う。

このように現在の「時間」と「長さ」の量は互いに独立に定義されているわけではなく，1 秒という時間の長さが決まることにより，1 m という長さが決めることができる。質量の単位はキログラム原器が標準となっているが，前述したように原器自体が経年変化する可能性もある。利用のために触れれば付着物がついたり表面分子が若干削れる可能性もある。実際，キログラム原器の質量は 1×10^{-8} 程度の割合の変動がありえると報告されているため，質量の再定義を行うための議論が長年続いてきた [35]。その結果，2019 年 5 月 20 日からはプランク定数を定数とし，その値に基づいて 1 kg を定義することが決まっている。光は波と粒子の両方の性質を持つが，その基本単位を光子と呼ぶ。周波数 ν 光子の持つエネルギーは $E = h\nu$ で表現される。ここで，比例定数となっている h がプランク定数である。物体がエネルギー E の光を出すと質量が E/c^2 だけ減少する。そこで，質量を，特定の波長の光子数に基づいて定義することができる[*1]。

筆者が子供のころは，光の速度は測定値であり，理科年表に $299,792.4562 \pm 0.0011$ km/s と書かれていた。それがある時にばっさりと誤差表示が削除されて誤差の無い量に変わっていた。驚いて調べてみたら光速を用いた定義に変わっていることに気づき，さらに驚いた。この変更は，**アインシュタイン**[*] の相対性理論における「**光速度不変の原理**」に従ったものである。二人で並んで歩いている時，互いの速度は相対的に 0 に見える。でも，立ち止まっている人には，その二人は動いて見える。このように，速度とは一般に基準点と物体の相対的な関係で決まるが，光の速度に関しては，どのような座標系で測っても同じ速度に見えるとするのが光速度不変の原理である。したがって，光速度を距離の定義に用いられたことは，それ以前のメートル原器のようなお約束事とは全く異なる物理学的必然ともいえる。

[*] Albert Einstein, 1879-1955, 独生まれ。1933 年にナチスに追放され米へ亡命

1.3 国際単位系接頭辞

例えば，1000 倍を表す接頭辞 k (キロ) を単位記号につけることで 1,000 m を 1 km, 1,000 g を 1 kg と表したり，1000 分の 1 倍を表す m (ミリ) を用いることで 0.001 s を 1 ms と表すことで，数値の記述を簡潔にすることができる。国際単位系で認められているこのような接頭辞を**国際接頭辞** (**SI 接頭辞**) という。表 1.1 に，SI 接頭辞の一覧を示す。国際接頭辞は 10 進数に基づいて単位表記であり，こ

[*1] なお，プランク定数から質量を導く方法は一意でないため，キログラムをどのように定義するかは明確には定められておらず，決まっているのは定数化されたプランク定数を用いることだけである。

表 1.1　国際単位系接頭辞一覧

記号	名称	10^n	記号	名称	10^n
Y	yotta (ヨタ)	10^{24}	d	deci (デシ)	10^{-1}
Z	zetta (ゼタ)	10^{21}	c	centi (センチ)	10^{-2}
E	exa (エクサ)	10^{18}	m	milli (ミリ)	10^{-3}
P	peta (ペタ)	10^{15}	μ	micro (マイクロ)	10^{-6}
T	tera (テラ)	10^{12}	n	nano (ナノ)	10^{-9}
G	giga (ギガ)	10^{9}	p	pico (ピコ)	10^{-12}
M	mega (メガ)	10^{6}	f	femto (フェムト)	10^{-15}
k	kilo (キロ)	10^{3}	a	atto (アト)	10^{-18}
h	hecto (ヘクト)	10^{2}	z	zepto (ゼプト)	10^{-21}
da	deca (デカ)	10^{1}	y	yocto (ヨクト)	10^{-24}

のように接頭辞を定め，質量や長さなどの複数の単位に同様に用いることを定めたことは，1 間が 6 尺, 1 町が 60 間, 1 里が 36 町などと繰り上がりの規則が不規則な上に，繰り上がるたびに名称が変化することが多かった古い単位系よりも，理解および記憶が容易な点で大変重要な成果である。

第 2 章

物理の基本概念

2.1　位置，変位，速度，加速度

イタリア人のガリレオ・ガリレイ[*] は，物体が水平運動や鉛直運動をする際，どのように動くのかを計測実験によって調べた。そして，物体が一定時間に動く距離を測定した結果，以下の発見をした。

[*]Galileo Galilei, 1564-1642, 伊

- 水平運動において物体が一定時間に動く距離は一定である。
- 鉛直運動において物体が一定時間に動く距離は一定の割合で増えていく。

そこでガリレオは**速度**と**加速度**の概念を確立して，

- 水平運動は**等速度運動**である
- 垂直運動は**等加速度運動**である

とまとめた [12]。さらに，ガリレイの死んだ年に生まれたとされるニュートン[†] は**微分・積分**を発明し，**位置・速度・加速度**が互いに**微分**と**積分**で関連しあっていることを示した。本節ではこれらの概念と定義を述べていく。

[†] 細かいことだが，当時イギリスが使っていたユリウス暦では，ニュートンの生誕は 1642 年 12 月 25 日であるが，1582 年にローマ教会が，さらにイギリスもその後 (1752 年以降) に採用するグレゴリウス暦では 1643 年 1 月 4 日生まれである。

2.2　位置と変位

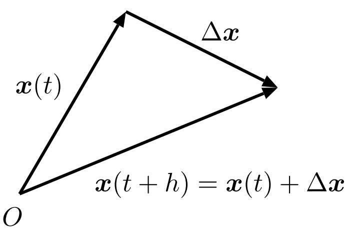


図 2.1　位置と変位

物体の**位置** (position) は，基準点が与えられてはじめて，そこからの方向と距離により記述できる。つまり位置とは**基準点を起点とするベクトル** (**位置ベクトルとよぶ**) [‡] で記述される。物体 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，その大きさ $|\boldsymbol{x}|$ は原点から物体 P までの**距離** (distance) を表す**スカラー** (scalar) [§] である。位置を図示するときには座標軸を利用するが，基準点を示す**原点 (Origin)** と，方角を示すための**座標軸の正の向き**を明示することは大変重要である。

[‡] **ベクトルは向きと大きさをもつ量**。英語では vector。語源はラテン語で「運ぶ者」を意味する vectum である。生物分野では「病原菌等を運ぶ物」「遺伝子の組込み実験において遺伝子を運ぶ役をするもの」を vector(ベクタ) と呼ぶ。

[§] **スカラーは大きさのみを表す量**。「秤」や「目盛」を意味する scale と語源は同じ。ベクトルとスカラーという語はアイルランドの物理学者・数学者の**ハミルトン**に 1849 年に命名されたものである。

時刻 t における物体 P の位置が位置ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ で与えられたとする。さらに時間が h 経過したときの物体の位置を $\boldsymbol{x}(t+h)$ とするとき，**変位**（displacement）

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)$$

を**変位ベクトル**とよぶ (図 2.1)。変位ベクトルの各成分について，その符号が正であれば物体は座標軸の正の向きに進んだことが示し，負であれば物体は座標軸の負

の向きに進んだことを示している。

2.3 速度

運動する物体の**位置が単位時間あたりどの程度変位したか**，すなわち**変位ベクトルを変位にかかった時間で割ったものが速度** (velocity) である。物体 P が時間 h の間に $\boldsymbol{x}(t)$ から $\boldsymbol{x}(t+h)$ に動いたなら，変位ベクトルが $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)$ で与えられたとき，この間の**平均速度** $\boldsymbol{v}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}}{h} = \frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} \tag{2.1}$$

上式からもわかるように**速度はベクトル**であり，その向きは変位ベクトルと同じである。

速度を決めるには物体の位置を異なる時刻に 2 度測る必要がある。よって，「瞬間の速度」というものは存在しないことになる。しかし，理論的には位置 $\boldsymbol{x}(t)$ の時間変化を測るための時間間隔 h を無限に小さくすることで瞬間の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を定義できる。すなわち

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} \tag{2.2}$$

この式の右辺が**微分** (differentiation) の定義式である。すなわち，**速度は位置の時間微分**で与えられる。そこで，時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}$ は以下のような微分記号を用いて表記する。

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}$$

$\dot{\boldsymbol{x}}$ は「エックス・ドット」と読み，$\boldsymbol{x}$ の上の点（˙）（ドット）は時間による微分であることを示す記号である[*]。

[*] 微分積分法はニュートンと**ライプニッツ** (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716, 独) によって独立に発見された。微積分の記号 $\int$ や $\frac{d}{dt}$ はライプニッツによるものであり，ドットを用いた $\dot{x}$ 等の表現はニュートンによるもの [7, p.20]。

物理学で単に速度という場合は，ほとんどの場合上記のように定義された瞬間の速度を指す。**速度**は前述の通りベクトルであり，**速さ** (speed) は速度 (velocity) の大きさ $|\boldsymbol{v}|$ のことを指す。すなわち**速さ**はスカラーである。

速度および速さの単位は，式 (2.1) や式 (2.2) からわかるように位置と時間の比で与えられる。すなわち MKS 単位系ならば以下の通りである。

$$[\text{速度}] = \frac{[\text{変位}]}{[\text{時間}]} = [\text{m/s}] \tag{2.3}$$

[例題 2.1] テニスの最速サーブの世界記録として，2012 年 5 月に 263.4 km/hr が記録された。サーバがサーブを打ってからレシーバのところに届くまでどの程度の時間がかかるか**概算**せよ。テニスコートの各辺の長さは 8.23 m と 23.77 m である (シングルスコートの場合)。ボールはコートの対角線にそって水平にまっすぐ飛んでくると仮定せよ。(誤差数 % 程度で求まればよい。)

[解説] 電卓や計算機を使うと計算ミスはなくなるが，入力ミスで間違えた答を出して気づかないままになることがよくある。ここでは，数 % の誤差は無視して概算することにより，正確では無くても大きく間違わない概算を行うようにする。

テニスコートの対角線の長さ l は次式で得られる。

$$\begin{aligned}
l &= \sqrt{(8.23\ \mathrm{m})^2 + (23.77\ \mathrm{m})^2} \\
&\simeq \sqrt{(8\ \mathrm{m})^2 + (24\ \mathrm{m})^2} \\
&= 24\sqrt{1 + \frac{1}{3^2}}\ \mathrm{m} \\
&\simeq 24\sqrt{1.1}\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

よってサーブが到達するまでに時間 T は

$$\begin{aligned}
T &= \frac{24\sqrt{1.1}\ \mathrm{m}}{263.4\ \mathrm{km/hr}} \\
&= \frac{24\sqrt{1.1}\ \mathrm{m}}{263.4 \times 10^3\ \mathrm{m}/(3.6 \times 10^3\ \mathrm{s})} \\
&= \frac{\cancel{24\sqrt{1.1}}\ \cancel{\mathrm{m}} \times 3.6 \times 1\cancel{0}^3\ \mathrm{s}}{\cancel{263.4}_{10} \times 1\cancel{0}^3\ \cancel{\mathrm{m}}} \\
&= 0.36\ \mathrm{s}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

最後の変形では分子の $24\sqrt{1.1}$ が分母の 263.4 のほぼ 1/10 と判断して計算した。結構乱暴な変形に見えるかもしれないが，もう少しだけまじめに計算しても $24\sqrt{1.1} \simeq 24 \times 1.05 = 25.4$ [*] なのでせいぜい数 % 程度の誤差であることがわかる。

[*] 一般に $x \ll 1$ に対して $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ より $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$.

■

例題のような概算を行うときには以下に注意すること。

(1) **計算式の数値には必ず単位を書き，単位も同時に計算する。**例えば時間を求める計算をして，最後に出た答の単位が m になっていれば，どこかで計算を間違えたことがわかる。km/h から m/s への変換も単位を書いていれば忘れたり間違えることは非常に少なくなる。

(2) **数字の計算はできるだけあとでする。**通分等のときにうまく近似すれば，面倒な計算を省くことができる。

(3) **最後に出た答が，常識的な物理量であるかを確認する。**例題で計算した答が例えば 36 s となったら，テニスの様子を思い浮かべるだけで明らかに間違いとわかる。計算ミスは誰でもするが，このような明らかな間違いに気づけば計算ミスを減らすことができる。

[**例題 2.2**] 東京駅を原点として東西方向に一次元の座標軸を定義し，その正の方向を東側とする。座標軸に沿って走る車 A,B の位置 $x_A(t)$, $x_B(t)$ をその座標値で表す。2 台の車 A, B が時刻 t に $x_A(t) = x_B(t) = 3$ km の位置にあったとして，以下の問に答えなさい。

(1) その後時間 $h = 10$ 分だけたったとき車 A は $x_A(t+h) = 9$ km に移動していた。このとき，以下を求めなさい。

(a) 時刻 t から $t+h$ の間の車 A の変位

(b) 時刻 t から $t+h$ の間の車 A の平均速度 (km/h と m/s で)

(2) 車 B は時刻 t の $h = 10$ 分前には車は $x_B(t-h) = 13$ km にあった。このとき，以下を求めなさい。

(a) 時刻 $t-h$ から t の間の車 B の変位

(b) 時刻 $t-h$ から t の間の車 B の平均速度 (km/h で)

(3) 車 B は，時刻 t から時刻 $t+h$ の間に $\Delta x = -10$ km だけ変位した。時刻 $t+h$ において車 B は東京駅に対してどのような位置にあるかを説明しなさい。

[解説] **(1)(a)** 時刻 t から $t+h$ における車 A の変位 Δx は以下のとおり。

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_A(t+h) - x_A(t)\\ &= 9\ \mathrm{km} - 3\ \mathrm{km}\\ &= 6\ \mathrm{km} \cdots (答)\end{aligned}$$

変位が正の値なので，車は東 (座標軸の正の方向) に進んだことがわかる。

(b) 平均時速 v は以下の通り。

$$\begin{aligned}v &= \frac{\Delta x}{h}\\ &= \frac{6\ \mathrm{km}}{10\ \mathrm{min}}\\ &= \frac{6\ \mathrm{km}}{10 \times \dfrac{1}{60}\mathrm{hr}}\\ &= \frac{6\ \mathrm{km} \times 60}{10\ \mathrm{hr}}\\ &= 36\ \mathrm{km/hr} \quad \cdots (答)\\ &= \frac{36 \times 10^3\ \mathrm{m}}{3.6 \times 10^3\ \mathrm{s}}\\ &= 10\ \mathrm{m/s} \quad \cdots (答)\end{aligned}$$

平均時速が正の値であることからも，車が東に進んだことを確認できる。

(2)(a) 時刻 $t-h$ から t における車 B の変位 Δx は以下の通り。

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_B(t) - x_B(t-h)\\ &= 3\ \mathrm{km} - 13\ \mathrm{km}\\ &= -10\ \mathrm{km} \quad \cdots (答)\end{aligned}$$

変位が負の値であることから，車は西 (座標軸の負の方向) に 10 km 進んだことがわかる。

(b) 平均時速 v は以下の通り。

$$\begin{aligned} v &= \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \\ &= -\frac{10 \text{ km}}{10 \text{ min}} \\ &= -\frac{10 \text{ km}}{\dfrac{10 \text{ min}}{60 \text{ min/hr}}} \\ &= -\frac{10 \text{ km} \times 60}{10 \text{ hr}} \\ &= -60 \text{ km/hr} \end{aligned}$$

速度が負の値であることからも，車の進行方向が西であることを確認できる。
(3) 時刻 t から $t+h$ までの車 B の変位 Δx は次式で与えられる。

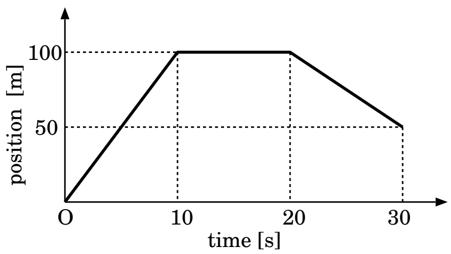
$$\Delta x = x(t+h) - x(t)$$

上式より，時刻 $t+h$ における位置 $x(t+h)$ を求めると，

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + \Delta x \\ &= 3 \text{ km} - 10 \text{ km} \\ &= -7 \text{ km}. \end{aligned}$$

ゆえに車 B は時刻 $t+h$ に東京駅から西に 7 km の位置にある。

[例題 **2.3**] 短距離走の練習をしている人が一直線のトラック上を走ったり止まったりしている。図は，その位置の時間変化をスタート地点を原点として示している。この人の速度の時間変化を求めて図示しなさい。



[解説]

グラフの傾きがこのヒトの速度 $v(t)$ となる。すなわち $0 \leq t < 10$ s のとき，

$$v = \frac{100 \text{ m} - 0 \text{ m}}{10 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}.$$

$10 \leq t < 20$ s のとき，

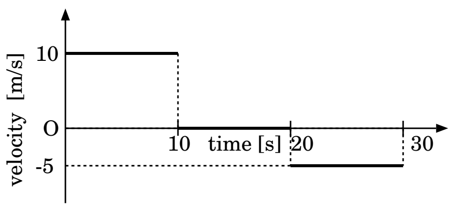


図 2.2 ランナーの速度の時間変化

$$v = \frac{100 \text{ m} - 100 \text{ m}}{20 \text{ s} - 10 \text{ s}} = 0 \text{ m/s}.$$

$20 \leq t < 30$ s のとき，

$$v = \frac{50 \text{ m} - 100 \text{ m}}{30 \text{ s} - 20 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}.$$

まとめると以下の通り。

$$v(t) = \begin{cases} 10 \text{ m/s} & (0 \leq t < 10 \text{ s}) \\ 0 \text{ m/s} & (10 \leq t < 20 \text{ s}) \\ -5 \text{ m/s} & (20 \leq t < 30 \text{ s}) \end{cases} \quad \cdots (\sharp)$$

グラフにすると図 2.2 のとおりである。

別解) このヒトの位置は以下のように表すことができる。

$$x(t) = \begin{cases} 10t \text{ [m]} & (0 \leq t < 10 \text{ s}) \\ 100 \text{ [m]} & (10 \leq t < 20 \text{ s}) \\ -5t + 200 \text{ [m/s]} & (20 \leq t < 30 \text{ s}) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

上式を時間 t で微分しても答 (式 ($\sharp$)) を得ることができる[*]。

[*] 式 ($*$) のように t などの変数を含む式に単位をそえるときには，変数と単位の区別がつきやすいように単位は [] で囲むことが多い。

2.4 加速度

速度の時間変化率を**加速度** (acceleration) と呼ぶ。時刻 t から時刻 $t+h$ までの時間 h の間の平均加速度 $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t)}{h} \tag{2.2}$$

であり，ある時刻 t の瞬間の加速度は以下で定義する。

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{v}(t)}{h} \tag{2.3}$$

つまり，**加速度は速度の時間微分**で与えられる。よって，加速度 $\boldsymbol{a}$ を速度 $\boldsymbol{v}(t)$ を用いて表すと

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}}$$

であり，位置 $\boldsymbol{x}$ で表すと

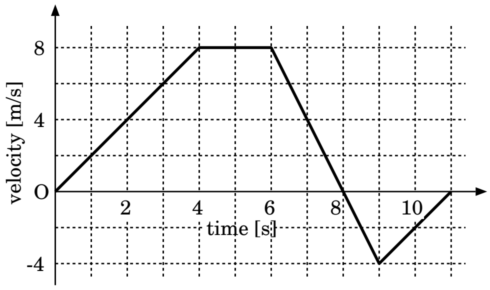
$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{x}}$$

となる。$\ddot{\boldsymbol{x}}$ は「エックス・ツードット」と読む

加速度の単位は，式 (2.2) や式 (2.3) からわかるように速度と時間の比で与えられる。すなわち MKS 単位系ならば以下の通りである。

$$[\text{加速度}] = \frac{[\text{速度}]}{[\text{時間}]} = \frac{[\text{m/s}]}{[\text{s}]} = [\text{m/s}^2] \tag{2.4}$$

[例題 2.4] 停止していた車が時刻 $t = 0$ に動きだし，その後 11 秒間に図に示すような速度変化を示した。



(1) 車の加速度が 0 であるのはいつか。

(2) 車の加速度が負であるのはいつか。

(3) この 11 秒間の車の加速度の変化を求めなさい。

(4) 車の加速度の向きと進行方向が逆になっているのは何秒目から何秒目までか。

[解説] **(1)** 車の加速度が 0 になるのは速度の変化が無いときなので $t = 4 \sim 6$ s の間である。

(2) 車の加速度が負になるのは速度が小さくなるときなので $t = 6 \sim 9$ s の間である。

(3) 車の加速度 a は以下の通り。$0 \leq t < 4$ s のとき，

$$a = \frac{8\ \mathrm{m/s} - 0\ \mathrm{m/s}}{4\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

$4\ \mathrm{s} \leq t < 6$ s のとき，

$$a = \frac{8\ \mathrm{m/s} - 8\ \mathrm{m/s}}{6\ \mathrm{s} - 4\ \mathrm{s}} = 0\ \mathrm{m/s^2}$$

$6\ \mathrm{s} \leq t < 9$ s のとき，

$$a = \frac{-4\ \mathrm{m/s} - 8\ \mathrm{m/s}}{9\ \mathrm{s} - 6\ \mathrm{s}} = -4\ \mathrm{m/s^2}$$

$9\ \mathrm{s} \leq t < 11$ s のとき，

$$a = \frac{0\ \mathrm{m/s} - (-4)\ \mathrm{m/s}}{11\ \mathrm{s} - 9\ \mathrm{s}} = 2\ \mathrm{m/s^2}$$

まとめると以下の通り。

$$a(t) = \begin{cases} 2\ \mathrm{m/s^2} & (0\ \mathrm{s} \leq t < 4\ \mathrm{s}) \\ 0\ \mathrm{m/s^2} & (4\ \mathrm{s} \leq t < 6\ \mathrm{s}) \\ -4\ \mathrm{m/s^2} & (6\ \mathrm{s} \leq t < 9\ \mathrm{s}) \\ 2\ \mathrm{m/s^2} & (9\ \mathrm{s} \leq t < 11\ \mathrm{s}) \end{cases} \quad \cdots (\text{答}) \tag{2.5}$$

別解) この車の速度は以下のように表すことができる。

$$v(t) = \begin{cases} 2t\ \mathrm{m/s} & (0\ \mathrm{s} \leq t < 4\ \mathrm{s}) \\ 8\ \mathrm{m/s} & (4\ \mathrm{s} \leq t < 6\ \mathrm{s}) \\ -4(t-8)\ \mathrm{m/s} & (6 \leq t < 8\ \mathrm{s}) \\ 2(t-11)\ \mathrm{m/s} & (8 \leq t < 11\ \mathrm{s}) \end{cases} \tag{2.6}$$

上式を時間 t で微分しても答 (式 (2.5)) を得ることができる

(4) 車の加速度と進行方向が逆になるのは，加速度と速度の符号が異なるときなので，$t = 6 \sim 8$ s および $t = 9 \sim 11$ s の時である。速度が正のとき車は前進，負のときバックしているとすると，$t = 6 \sim 8$ s は車が前進しているときにブレーキを踏んでいる状態，$t = 9 \sim 11$ s はバックしているときにアクセルを踏んだ状態に相当する。

■

[例題 **2.5**] ある車がスタート地点から出発して加速しながら進んでいった。そのスタート地点からの距離 x を測ると経過時間 t に対して $x = at^2$ (a: 定数) という関係式が成り立つことがわかった。この車の速度と加速度の時間変化を求めなさい。

[解説] **(1)** 車の位置を微分することにより順次速度 $\dot{x}$ と加速度 $\ddot{x}$ を得ることができる。すなわち

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2at$$
$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 2a$$

上式からこの運動は加速度が一定値であることがわかる。このような運動を等加速度運動と呼ぶ。等加速度運動について詳しくは 3.4.4 節で扱う。

■

2.5 積分

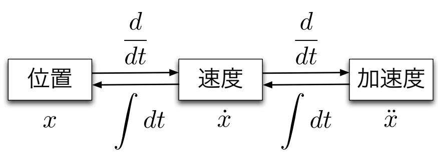


図 2.3 位置, 速度, 加速度の関係

前節までに示したように，位置 $\boldsymbol{x}(t)$ が与えられたら時間微分により速度 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ および加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ を順次得ることができる。この逆変換を行えば加速度から速度を，そして速度から位置を得ることができる。この逆変換を**積分** (integration) とよぶ (図 2.3)。

2.5.1 不定積分

車を運転するとき，北に時速 60 km で運転するように指示されたとしよう。この指示は，北向きの空いた道路さえあれば東京にいようがパリにいようが場所は無関係に実現できる。言いかえると，車の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ のみが時間の関数として与えられた場合，車の位置は出発点に依存する集合として捉えることができる。速度に加えて初期位置が与えられたら，その後の位置が時間とともにどうかわるかは一意に決めることができる (図 2.4)。

このように 車の速度関数 $\boldsymbol{v}(t)$ に対して，**位置を決める関数の集合**を与える変換を**不定積分** (indefinite integral) といい，次のように表す。

$$\int \boldsymbol{v}(t)dt \tag{2.7}$$

ある関数 $\boldsymbol{x}(t)$ の時間微分が $\boldsymbol{v}(t)$ ならば $(\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{v}(t))$ 次式が成り立つ。

$$\int \boldsymbol{v}(t)dt = \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C} \tag{2.8}$$

($\boldsymbol{C}$ は積分定数ベクトル)

積分定数ベクトル $\boldsymbol{C}$ は，例えば車の出発点 (時刻 $t = 0$ における位置) が与えられたら決めることができる。

同様に，加速度関数が与えられれば不定積分によって速度関数の集合を不定積分で求めることができる。

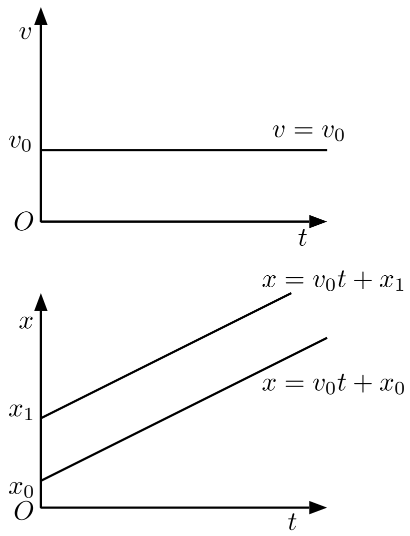


図 2.4 速度 v(上図) と位置 x(下図) の位置変化。物体の速度が一定であれば，位置の変化は一定である事がわかるが，その位置は出発地 ($t = 0$ での位置) 等の位置によって様々な可能性がある。

2.5.2 定積分

車のスピードメータの表示 $v(t)$ を見ながら時刻 t_0 から時刻 t_f の間に進んだ距離を推定する方法を考えてみよう。この間 $\Delta t = \frac{t_f - t_0}{n}$ 秒毎に速度を確認したら，進んだ距離 Δx は次のように見積もることができる (図 2.5)。

$$\begin{aligned}\Delta x &\simeq v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + v(t_2)\Delta t + \cdots + v(t_{n-1})\Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t\end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで $t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \cdots, t_f = t_n = t_0 + n\Delta t$ とした。

スピードメータを確認する時間間隔 Δt は短い程，言いかえると測定回数 n が大きいほど距離 Δx の見積りはよくなる。すなわち，

$$\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t.$$

ここで簡単化のため，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}$ を $\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}$，また，$n \to \infty$ の極限での微小時間 Δt を dt，さらに t_k を単に t と表せば上式を以下のように書き直すことができる。

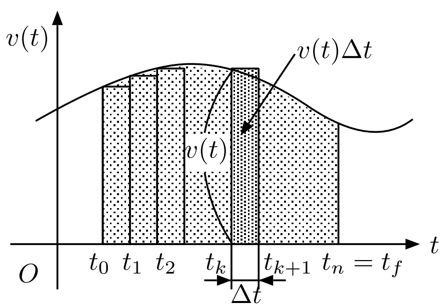


図 2.5 速度から距離を求める

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_f} v(t)dt \tag{2.10}$$

これを $v(t)$ の**定積分** (definite integral) とよぶ。このように，定積分とは微小面積 (微小移動距離) $v(t)dt$ を与えられた区間において足しあわせることによって距離を求める方法である。さて，この定積分の計算はどのようにすればよいだろうか？厳密な証明は解析学の教科書にまかせて，ここでは簡単な説明のみを述べる。

速度 $v(t)$ で動く車の位置 $X(t)$ は,

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

を満たす関数 $x(t)$ を用いると次のように書ける (式 (2.8) 参照)。

$$X(t) = x(t) + C \tag{2.11}$$

時刻 t_0 から t までにすすんだ距離 Δx（より正確には変位）は

$$\begin{aligned}\Delta x &= X(t) - X(t_0)\\ &= \{x(t) + C\} - \{x(t_0) + C\}\\ &= x(t) - x(t_0)\end{aligned}$$

となる。よって上式と式 (2.10) より次式が得られる。

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x(t)|_{t_0}^{t} = x(t) - x(t_0) \tag{2.12}$$

不定積分は速度から位置を求める計算なので初期位置に依存する積分定数が表れるが，定積分で求められる値はある時間内の変位なので初期位置に無関係な値であるため積分定数を含まない。

また，式 (2.12) を変形することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned}x(t) &= \Delta x + x(t_0)\\ &= \int_{t_0}^{t} v(t)dt + x(t_0)\end{aligned}$$

この式は，位置 $x(t)$ を，初期位置 $x(t_0)$ に変位（右辺第一項）を足すことによって求める式になっている。同様に，加速度 $a(t)$ が与えられれば，ある時刻の速度を求めることができる。

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + v(t_0)$$

より一般的に, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ や加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ が与えられる場合も同様に，それぞれ時刻 t_0 から t までの間の変位 $\Delta\boldsymbol{x}$ および速度の変化 $\Delta\boldsymbol{v}$ を次式で求めることができる。

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x} &= \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)\\ \Delta\boldsymbol{v} &= \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}(t_0)\end{aligned}$$

定積分により位置および速度を求める式に書き直すと次式になる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)dt + \boldsymbol{x}(t_0)\\ \boldsymbol{v}(t) &= \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(t)dt + \boldsymbol{v}(t_0)\end{aligned}$$

[例題 **2.6**] 例題 2.4 の車について，11 秒間に車が動いた距離を以下の 3 つの方法で求めなさい。

(1) 1 秒毎の速度 $v(t)$ ($t = 0, 1, 2, \cdots, 10$ [s]) を確認し，それをもとに $\Delta t = 1$ s の間に進んだ距離 $v(t)\Delta t$ をそれぞれ求め，その和により 10 秒間の移動距離を求める。

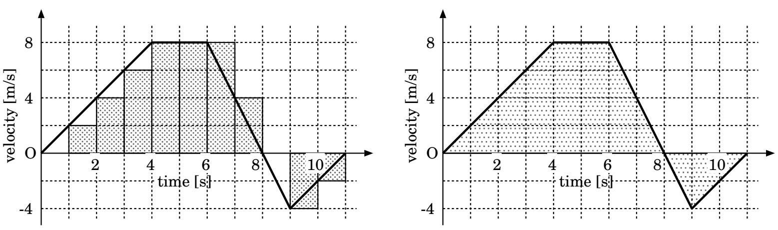
(2) 速度と時間の関係を示す線と t 軸で囲まれた台形の面積を求める。

(3) 車の速度 v と t の関係式を書き，積分計算で求める。

[解説]

(1) 題意の計算で得られる距離は図 2.6(a) の網掛部の面積と等しい。ここで，速度が負の部分は進行方向が逆になるので，その面積は負になることに注意せよ。

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{10} v(t)\Delta t &= (v(0) + v(1) + v(2) + \cdots + v(9) + v(10))\Delta t \\ &= (0 + 2 + 4 + 6 + 8 \times 3 + 4 + (-4) + (-2))\ \mathrm{m/s} \times 1\ \mathrm{s} \\ &= 34\ \mathrm{m} \quad \cdots \textbf{(答)}\end{aligned} \tag{2.13}$$



(a) (b)

図 2.6 車の進んだ距離の計算方法

速度データをもとに計算機を用いて進んだ距離を求めるときにはこのような計算方法がしばしば使われる。このような面積の計算を，非常に小さい Δt に対して行うことが積分計算の基本的な考え方である。

(2) 題意により与えられる値は図 2.6(b) の網掛部の面積と等しい。

$$\frac{(2+8)\ \mathrm{s} \times 8\ \mathrm{m/s}}{2} + \frac{3\ \mathrm{s} \times (-4)\ \mathrm{m/s}}{2}$$
$$= 34\ \mathrm{m} \quad \cdots \textbf{(答)}$$

(3) 車の速度変化は式 (2.6) で表される。よって積分計算で進んだ距離を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned}x &= \int_0^4 2t dt + \int_4^6 8 dt + \int_6^9 (-4(t-8)) dt + \int_9^{11} 2(t-11) dt \\ &= t^2\big|_0^4 + 8t\big|_4^6 - 2(t-8)^2\big|_6^9 + (t-11)^2\big|_9^{11} \\ &= 34\ \mathrm{m} \quad \cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

第 3 章

力学の基本法則

3.1　アリストテレスからガリレオへ

古代ギリシアの哲学者アリストテレス[*] は，宇宙，動物，政治，弁論術などの多岐に渡る分野についての膨大な著作を残し，そこに記した様々な説がガリレイの時代では常識とされていた[†]。その内容は例えば以下のようなものである。

- 物体は外力を与え続けなければ止まってしまう。
- 重い物ほど速く落ちる。
- 地球が宇宙の中心である (**天動説**, geocentric model)[‡]

身の回りの世界を考える限り，物を投げても転がしてもやがては止まってしまうし，石は羽よりも速く落ちる。空を見れば，月や太陽，その他様々な星は我々の住む大地のまわりを回転しているように見える。このようにアリストテレスの説は経験的事実を説明しているという点で決して間違いではない。しかしガリレイはこれらの説の真偽を実験により検証し，様々な物理現象の背後にある原理を探求していった[§]。

ガリレイは自作の望遠鏡[¶] による天体の観測によって，月はこれまでに考えられたような単なる球形ではなく表面に起伏があること，木星の周囲を回る星があること，太陽には黒点があり，まだ，その位置は変化していることから太陽は自転していると考えられること等を発見し，「**星界の報告** (1610)」および「**太陽黒点に関する第二書簡** (1613)」にまとめた [13]。これらの発見を通してコペルニクス [||] の唱える**地動説** (heliocentric system)[15] が正しいことを確信していった。しかし地動説を支持するにあたっては，地球の自転を認める必要がある。地球の自転に関しては，天動説者から次のような激しい反論があった。地球が球体であり，その球が一日に 1 回転するならば，巨大な球の表面である地表の移動速度は非常に大きなものになる。その地表において人がジャンプすれば落下点は元の場所から遠く離れた場所に着地するはずだし，ピサの斜塔から物を落とせば，遠く離れた地点に落ちるはずである。このような天動説者からの反論に答えるために，ガリレイは物体の運動に関する多くの定量的実験を行った。そして物体の水平運動が本質的に等速度運動であり，地表にいる人も地表とともに動きつづけていると結論づけた[**]。これが**慣性の法則の発見**である。この発見は，単なる定量的な実験の積み重ねの結果ではなく，身の回りの物体の運動に基づき，摩擦等の影響を除外した極限での物体運

[*] アリストテレス (Aristotle, BC384-322) はギリシアの哲学者でプラトンの弟子。論証の方法として演繹法 (真とする複数の前提を組み合わせて論理的に結論を導く方法) や，観察結果の背後にある理由を推定 (仮説形成) する推論方法であるアブダクションを提案したのもアリストテレスである。

[†] 神学者**トマス・アクィナス** (1225 頃-1274, 伊) は，キリスト教の教義をまとめた「神学大全」にアリストテレス哲学を導入し，キリスト教の普及に利用した。

[‡] アリストテレスは，大地は宇宙の中心に静止しており，その周りを同心球状に月，水星，金星，太陽，その他の惑星が取り囲んで廻っていると説明した。その後，実際の星の運行をより正解に予測できるように**プトレマイオス** (83 頃-168 頃, 古代ローマ) らが修正した説が，天動説を唱えるコペルニクスやガリレイの時代には支持されていた。

[§] ガリレイがアリストテレスの説に対する反論をまとめた本に「新科学対話」[11][12] がある。

[¶] ガリレイは当時の望遠鏡に様々な改良を加えた。その構造に関するガリレイ自身による解説は文献「星界の報告」([13, p.13-17] に，また，最近の研究による解説が文献 [27] にある。

[||]Nicolaus Copernicus, 1473-1543, ポーランド or ドイツ

[**] 安野光雅は「天動説の絵本一てんがうごいていたころのはなし」で，地動説が天動説に挑んでいく物語を美しい絵と簡潔な文章で説明している [20]。

動を類推することによって生まれた大変創造的な発見である。

水平運動が等速度運動であり，落下運動が等加速度運動であることを示したのも，真空中での物体の落下速度は物体の重さと無関係であることを説明したのもガリレイであり，これもアリストテレス的な当時の「重いものほど早く落ちる」という常識を覆す発見である。実際に空気中で物を落とせば，一般に軽い物ほど早く落ちることをガリレイは実験結果に基づいて説明している。つまり，地球上で「重い物ほど早く落ちる」というのは一般に正しい。ガリレイの視点の鋭さはその原因が「重さ自体」ではなく「周囲の空気から受ける浮力」や「表面形状に起因する空気抵抗」にあると気づいたという点にある。

ちなみに，「ガリレイは塔の上からの落下実験により落下速度が重さによらないことを示した」という有名な逸話には正確な記録は無く，ガリレイの没後に作られたものであるという説もある。もっとも，ガリレオの著書「新科学対話」[11] には塔から物体を落とした場合の落下時間の議論もある上，ガリレオはピサ大学で学び，さらに教鞭をとっていた時代もあるので，実験マニアのガリレオが近所のピサの斜塔からいろいろな物体を落として落下時間の計測実験*1をしてしたというのは本当じゃないかと想像するが，その実験で確認した結果は「(空気中では) 重いものほど早く落ちる」ということであると思われる。その証拠に「新科学対話」では，密度の異なる物体の落下速度が異なる原因として，ガリレオは浮力と粘性摩擦に注目して議論しており*2，空気中での物体の浮力の議論のために空気の密度の測定方法も提案し，現在知られている値に近い値を求めている。その結果に基づいて，風船のように軽いもの*3や，鉛や黒檀の密度の比較を行い，風船は鉛や黒檀に比べて 3/4 程度の速度で落ちること，また，黒檀は鉛よりも若干ではあるが落下速度が遅いことを定量的に解説し，その見積もりが計測結果と近いと説明している。

そして，真空中での物体の落下速度が，物体の大きさや密度によらないことは，以下のようにいろいろな方法で説明している。

(1) 思考実験: 重いものほどゆっくり落ちるとする。ならば軽いゴマ粒を重い石にくっつければ，ゴマ粒は石の落下速度を弱めると考えられる。しかし，ゴマ粒と石の合計の重さは大きくなるから，ゴマ粒のくっついた石の落下速度は早くならないといけないので，矛盾が生じる。すなわち，落下速度は重さによらないと考えるのが良い。

(2) 実験証拠 1: 水中より空気中のほうが，比重の異なる物体の落下速度の差は小さい。この事実は，落下速度の差が媒体 (水か空気か) の違いによるることを示しており，媒体がない真空中では落下速度の差がなくなるはずである。

(3) 実験証拠 2: 糸の先に軽いコルクや重い鉛を結びつけた振り子を観察すると，どちらも同じ周期で振動する。空気による抵抗が小さいゆっくりした運動でこのような結果が得られることは，落下速度は重さによらないことを意

*1 人に当たるとあぶないから真似しないように

*2 厳密には，浮力と粘性摩擦の概念がやや混同されて書かれているが，ニュートン以前の知識に基づく推論としては非常に緻密で素晴らしい。

*3 ガリレオの時代には風船はなかったので，代わりに (おそらく牛の) 膀胱を使って作った風船のようなもの

味する。

(4) 実験証拠 3: 落下物体は媒体から抵抗を受ける。もし，周囲の媒体に対する物体の密度が 10 倍なら，落下速度は 1/10 だけ真空中に比べて小さくなり，物体の密度が媒体の 100 倍なら，落下速度は 1/100 だけ小さくなる。このような仮定に基づくと，さまざまな物体の落下速度を説明でき，また，真空中での落下速度はどのような物体も同じということになる。

ガリレオは，このようにアリストテレスの様々な説に対して多くの反論をしているが，「新科学対話」には「私の感服するアリストテレス — 殊に彼は，幾分でも考察に値すると思った問題は如何なるものでも論議することを欠かさなかったのですから…」という下りもあるので，非常に尊敬していたのではと思われる。なお，あまり知られていないが，落下速度が質量に依存しないことはオランダの科学者**シモン・ステヴィン** (p.37) によって 1586 年にガリレイに先んじて発表されている。

ガリレイの時代まで身の回りの物体の運動に関する定量的研究がほとんどなされていなかった大きな原因の一つは，秒程度の長さの時間を測る簡易な方法がなかったことだろう。ガリレイの時代の時計の文字盤には針が一本だけで，分針もつくようになったのは 17 世紀末からであった[*]。ガリレイ自身は 19 才 (1583 年) の時，礼拝堂のシャンデリアの揺れの周期が振幅に関わらず一定であること（**振り子の等時性**）を，自分の脈拍を時計かわりにして発見したとされている[†][3]。ガリレイは，振り子の等時性を利用した脈拍計を作り pulsilogon と名付けた [8]。振り子時計の設計も試みたが完成品は作られず，計測実験には自身で改良した水時計を使っていたらしい[‡]。また，ガリレイによる発見はホイヘンスによる**振り子時計の発明** (1656 年) につながる[§]。

ガリレイは多くの運動の定量的解析を行い，その結果から速度・加速度の概念も確立した。このようにガリレイは，定性的にしか行われていなかった自然科学の研究に**定量的実験**と**数学的解析**という手法を持ち込んで**実験科学**の礎を築いたことから「**近代科学の父**」と呼ばれている[¶]。

3.2 運動の第一法則 (慣性の法則)

イギリスの物理学者アイザック・ニュートン[||]が「プリンキピア・マテマティカ」[6, 5] (Principia Mathematica, 図 3.1) で説明した**運動の第一法則 (慣性の法則)** (Newton's first law of motion: Law of inertia) は以下のようなものである。

> **すべての物体は，それに加えられた力によってその状態が変化させられない限り，静止あるいは一直線上の等速運動の状態を続ける** [16]。

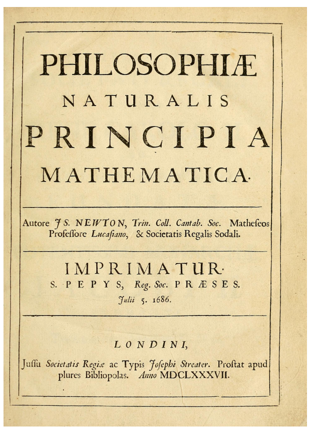

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

図 3.1 プリンキピアの表紙 [6]

このように，**力** (force) をうけていない物体が行う運動を**慣性運動**という。逆に，この慣性の法則が成り立つ座標系を「**慣性系**」と

[*]「時計の社会史」[28, p.13]

[†] 厳密には，振り子の等時性は振幅が小さい時に近似的に成立する。詳しくは 7.3 節参照。

[‡]「ファインマンさん，力学を語る」[14] (p.31)，「新科学対話」[11]

[§] クリスチャン・ホイヘンス (Christian Huygens，1629-1698，蘭) は運動量保存則，弾性衝突の法則，波の屈折に関するホイヘンスの原理，土星の輪の発見等多くの業績を残した物理学者である。父親は著名な作曲家かつ詩人であったコンスタンティン・ホイヘンス (Constantijn Huygens，1596-1687) であり，デカルトらと交流があったことから，クリスチャン・ホイヘンスもデカルトの影響を大きく受けた。また，3.5 節で述べるように，ホイヘンスによる時計の開発は，大航海時代に大きな影響を及ぼすことになる。確率論の基礎を築いたことでも知られており，「運まかせゲームの計算」という論文を残している [24]。

[¶] ガリレイの父親ヴィンセンツォ・ガリレイ (Vincenzo Galilei) は音楽史に名を残す音楽家である。弦の振動数の比が張力の平方根に比例することを発見するなど，音響学上重要な定量的研究も行っており，その実験には息子のガリレイも立ち会っていた可能性が高い [23, p.44]。 実験に基づく定量的解析を行うガリレイの研究手法は，父譲りのようである。

[||]Issac Newton，1642/1643-1727，英

いう。

加速している電車に乗っている人には，窓の外の風景は加速しているように見えるし，電車のつり革は後ろの方へ動くように見える。つまり**加速している電車を基準とした座標系は「慣性系」ではない**。物体に働く力と運動の関係を議論するための座標系としては，このような座標系ではなく，慣性系を選ぶ方必要がある。慣性の法則は次節で述べる**運動の第二法則** (3.4 節参照) に含まれる概念でもあるが，それにも拘らず慣性の法則が第一法則として位置付けられているのは，ニュートンが力学法則の体系化を行う上で，その議論の土台となる**慣性系**の概念を明確にする必要があったためである。

3.3 慣性系と力 *

加速している電車に乗っている人には，窓の外の風景は加速しているように見えるし，電車のつり革は後ろの方へ動くように見える。つまり**加速している電車を基準とした座標系は「慣性系」ではない**。しかし，等加速度運動をしている場合にも，車内の全ての物体には特別な一定の**外力**[*] が働いていると仮定すると，車内の記述をする上では**電車を基準とした座標系は「慣性系」とみなすことができる**。

[*] 物体に対してその外部から働く力

自由落下する部屋の中にいる時，その部屋を基準とした座標系は，部屋の内部を記述する上ではほぼ「慣性系」である。実際，地球上で無重力実験を行うときには，自由落下をする箱や飛行機内で行う (正確には空気抵抗を補うだけの加速も行う)。

ここであげた例からわかるように，ある系が慣性系であるかどうかの判断は少々難しい。なぜなら，慣性系であることを判断するには物体に働く**外力**が存在するかどうかを判断しないといけないが，**外力というものが必ずしも明らかなものではない**ためである。例えば密室にいる実験者がある力を感じるとき，それが地球の万有引力 (外力) によるものなのか，その密室自体の運動によるみかけのものなのかを判断することは難しい。同様に，地上にいる我々にとっても，我々が地面に引き付けられる力が万有引力のためなのか，地面が空の方向に向かって移動しているためのものかを判断するのは難しい[†]。このように，外力は座標系によって現れたり，場合によっては消滅したように見える[‡]。力というものが座標系によって異なって見えるということは，注目している物体にどのような力が働いているかということ自体，確認することは難しいということになる。となると，「完全に力が働いていないと保証される物体」を用意することは不可能であり，「外力が働いていない物体の運動が等速度運動となる」と述べる慣性の法則が，本当に物理世界で成立するかどうかすら証明できない。つまり，「慣性系」とは実は想像上のものである。しかし，多くの力学現象の観察結果の極限としてその存在を認めてしまうことにより，周囲の物理現象の解明の基盤にしてしまおうというのが「慣性の法則」である。よって「慣性の法則」は自然現象から発見された法則であるが，実のところはむしろ，ひとつの定義である。その定義によると，「物体が等速度運動をしているならば，その物体に力は働いていない」と考えることができる。また，等速度運動を行っている物体 A と行っていない物体 B を同時に観測したなら，少なくとも一方には外力がはたらいていると考えられる[§]。このように，**「力」とは「物体の運動をもとに類推されるもの」**である。ただし，壁を押したときのように，必ずし

[†] 球形の地球上の様々な点で，地面方向すなわち地球の中心方向に働く力があることを認識すれば，その力が万有引力のためと考えることができるが，局所的な情報による力の原因の判断は常に困難である

[‡] 数学的な議論は 3.7 節で行う

[§] 観測者自身も外力を受けている可能性もあることに注意。

も運動から力を類推できないことがあるのも経験上明らかである。しかしこの力も，同じ作用をボールに加えたときの運動から演繹されるものである。第一法則の真の意味は，我々が経験的に認識するこのような「力の正体」を述べる一方で，物体の運動を記述するには「慣性系」という閉じた系 (全ての力を内包した系) において物体に働く「力」と運動の関係を記述すればよいという力学の基本的な考え方を提示した点にある。「力」と「運動」の関係については次節で説明する「第二法則」でさらに定式化される。

地球上に固定した座標系は，地上の局所的な多くの物理現象を記述する上では，(近似的に) 慣性系と考えて実用上問題ない。そのために地上の物体の運動の記述が容易になっていることは幸運である。また，だからこそ「慣性系」という概念が産まれたといえる[*]。

[*] 台風などに渦が存在するのは地球の自転運動によって生じるコリオリの力 (回転運動をする非慣性系において観察される見掛けの力。7.8 節で詳しく述べる) による。地球の自転がとても速かったり，地球の半径がとても小さければ地上の物体の運動は慣性系とは異なる運動になり，ニュートンがリンゴを見て万有引力を思い付くこともなかっただろう。

[問 **3.1**] 地上に固定した水平面内の座標系をほぼ「慣性系」と捉えることは実用上ほとんど問題ないが，厳密には慣性系ではない。その理由をできるだけ多く述べよ。

3.4 運動の第二法則 (加速度の法則)

3.4.1 運動方程式

ニュートンの**運動の第ニ法則** (Newton's second law of motion : Law of acceleration) を現代風に書くと次のようになる。

ある物体が力を受ける時，その物体には受けた力に比例した加速度が生じる

この**定性的表現**を，次のような**定量的表現**にしたものが，今日**ニュートンの運動方程式** (equation of motion) と呼ばれているものである[†] 。

[†] ニュートンの「プリンキピア」には微積分による表現は用いられておらず，一貫して文章と幾何学による表現で書かれている [6, 16]。ニュートンの運動方程式を，現在紹介されるような直交座標系における微分方程式に表したのはニュートンではなく，スイス生まれの数学者レオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-1783) である [29]。

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{3.1}$$

ここで，$\boldsymbol{a}$ は物体の加速度，$\boldsymbol{F}$ は物体の受ける力である。この式より力は向きと大きさをもつベクトルであることがわかる。比例定数 m は物体に依存する量であり，力をうけた物体の動きやすさ (慣性) を示す指標である。これを**質量** (mass) もしくは**慣性質量** (inertia mass) と呼ぶ。

ある物体と国際単位系の定義に基づく 1 kg の物体が同じ力に加えた場合の加速度の比がわかれば，上式よりその物体の慣性質量を決定できる。

さて，運動方程式 (3.1) の両辺を m で割ると

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{3.2}$$

となり，物体の加速度の大きさは，物体に働く力に比例するが，質量に反比例すること，加速度の向きは力の向きと同じであることがわかる。

ある大きさの物体に力を加えた場合には，多くの場合には並進運動だけではなく回転運動も生じる。本書では... で物体の回転運動を扱うが，それまでは上記の運動方程式で記述できる並進運動のみを扱う。回転運動を無視して運動の議論を行う時には，物体をしばしば**質点** (material point) として扱う。質点とは質量のみをも

ち大きさをもたない仮想上の物体である。本書でも，回転運動を扱う章以外で「物体」と書いたときには質点を意味する。大きさのある物体に対しては，重心とよばれる点を定義し，重心位置に対して運動方程式を適用することで物体の並進運動を議論できる (重心位置については 6 節参照)。

力の単位を MKS 単位により表すと，式 (3.1) より

$$[\text{力}] = [\text{質量・加速度}] = [\mathrm{kg \cdot m/s^2}] \tag{3.3}$$

となる。略号として **[N](ニュートン)** を用いることも多い。すなわち

$$[\mathrm{N}] = [\mathrm{kg \cdot m/s^2}] \tag{3.4}$$

である。[N] はニュートンの業績を讃えてその名前を単位名としたものである。

3.4.2 順ダイナミクスと逆ダイナミクス

ニュートンの運動方程式は単なる等式ではなく，右辺は運動の原因が，左辺はその結果が記述されており，一種の因果関係が示されている。このように数式では，しばしば**右辺に原因，左辺に結果**を書く。ただし，制御工学の分野では，ロボットなどの機械に目標の加速度 $\boldsymbol{a}$ を生じさせるため，モータが出すべき力を計算することがしばしば必要になる。この時には逆に

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{3.5}$$

と書く。この場合，設定した加速度を与える力を求めることから，通常の物理現象と因果関係が逆になるので，このような計算は**逆ダイナミクス** (inverse dynamics) **(逆動力学) 計算**と呼ばれる。一方，式 (3.1) で表される力から加速度を求めるような通常の物理現象と同じ因果関係の計算は，**順ダイナミクス (順動力学) 計算** (forward dynamics) と呼ぶ。

3.4.3 等速度運動

一次元空間上に外力を受けない質量 m の**質点**[*] (material point) があるとする。この物体の運動を運動方程式を使って解析してみよう。この質点の位置を x で表すと，運動方程式は

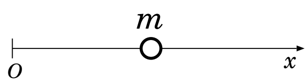


図 3.2 外力を受けない物体

$$m\ddot{x} = 0 \tag{3.6}$$

となる[†]。この式の右辺に時刻 t を表す変数がないことから，物体の加速度が時刻によらず常に一定値 (0) であることがわかる。上式の両辺を m で割って積分すると次式になる。

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \dot{x} &= \int 0 dt = C_1 \quad (C_1\text{:積分定数}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで、もし $\dot{x}(0) = v_0$ であるなら $C_1 = v_0$ となる。すなわち、

$$\dot{x} = v_0 \tag{3.8}$$

[*] 質点とは質量のみをもち大きさをもたない仮想上の物体を指す。物体内部に自由度をもたないため，回転運動を考える必要がない議論においてよく使われる概念。本テキストの回転運動以外を扱う部分で「物体」と書いたときには質点を意味する。絵を描くときにはどうしても大きさが必要となるが，その中心点 (厳密には 6 で説明する重心位置) を差す概念として捉えてほしい。

[†] 運動方程式を書くときには，$\ddot{x} = 0$ 等と簡略化せず，質量や力を明記すること。

上式は物体の速度 $\dot{x}$ が定数 v_0 であることを示すので、**等速度運動の定量的表現**になっていることがわかる。よって式 (3.8) は,「物体に力が働かないときには物体は等速度運動 ($v_0 \neq 0$) もしくは静止 ($v_0 = 0$) を続ける」という第一法則を表現していることになる。

式 (3.7) をさらに積分すれば，等速度運動の位置変化を表す式も得られる。

$$x = v_0 t + C_2 \quad (C_1, C_2\text{: 積分定数}) \tag{3.9}$$

もし、物体の初期位置が $x(0) = x_0$ と与えられていたら、次のように書き直すことが出来る。

$$x = v_0 t + x_0 \tag{3.10}$$

[問 **3.2**]

(1) 外力を受けずに一直線上を運動する質点の運動方程式を書きなさい。また，運動方程式を積分することにより物体の位置変化を表す式を導き，初速度 ($t = 0$ における速度) が 0 であった場合と，$v_0(\neq 0)$ であった場合について，それぞれどのような運動をするか説明しなさい。ただし，質点は $t = 0$ において原点にあったとする。

(2) 質点の位置の時間変化のグラフを，初速度により場合分けして書きなさい。

3.4.4 等加速度運動

座標軸と同じ向きの一定の力 F[*] が働いている質点の運動を考えてみよう。運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x} = F$$

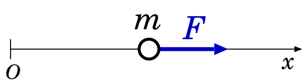


図 3.3 一定の力を受ける物体

[*]「一定の力」とは，力が時間とともに変化しないことを意味する。

両辺を m で割ると次式が得られる。

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}$$

この式は加速度が一定の運動であることを示す。すなわち，一定の力によって生じる運動は**等加速度運動**である。さらに上式を積分することにより，等加速度運動速度や位置の変化に関する表現も得ることができる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int \frac{F}{m} dt \\ &= \frac{F}{m} t + C_1 \quad (C_1 : \text{定数}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} x &= \int \left(\frac{F}{m} t + C_1 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_2 : \text{定数}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

このようにして，等加速度運動においては速度は時間に関する 1 次関数に，位置は 2 次関数になることがわかる。また，式 (3.11),(3.12) において $F = 0$ とおくと，等速度運動に対する式 (3.7)(3.9) と同じ形になることも確認できる。

前節と本節では等速度運動と等加速度運動について一次元の例を用いて説明したが，より一般的に 2 次元空間や 3 次元空間でも運動方程式をベクトル方程式として表せば同様の議論ができる。

[問 3.3]

(1) 一定の力 F をうけて運動する質量 m の質点の加速度，速度，位置変化をグラフに表しなさい。ただし，質点は $t = 0$ において原点に静止[*] していたとする。

(2) $t = 0$ から一定の時間間隔で物体の変位を観察したら，その変位は時間とともにどのように変化するだろうか。

[*] 物体の位置を $x(t)$ で表すとき，「$t = 0$ において原点に静止」という定性的表現は $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$ という定量的表現と同じ意味である。

3.4.5 運動と力

物体に力を与えると物体に加速度が生じるという点で、力は物体の運動の原動力となる。しかし、力の向きと物体の運動の方向は必ずしも一致しない。その例を次の例題で紹介する。

[例題 3.1] 車は地面と接している車輪を回転させることによって，推進力を得て運動している。例題 2.4 の車について以下の問に答えなさい。車は一直線上を動いており，車の運動を妨げる摩擦等は無視できるとして以下の問に答えなさい。

(1) 車が力を出していなかったのは何秒目から何秒目までか。

(2) 車が出す力の向きと車の運動の向きが逆になっているのは何秒目から何秒目までか。

(3) 車の質量が 800kg だったとする。車の出す力の大きさの最大値を述べなさい。

[解説] **(1)** 車が力を出していないとき，加速度は 0 になるので車は等速度運動を行う。その期間は 4 秒目から 6 秒目の間。

(2) 車の出す力の向きと加速度の向きは同じなので，車の運動と加速度の向きが逆になる期間が求める答である。これは 6 秒目から 8 秒目，および 9 秒目から 11 秒目。

(3) 力の大きさが最大になるのは車の加速度の大きさが最大になるとき，すなわち 6 秒目から 9 秒目の間である。このとき車に働く力 F は，

$$F = 800\ [\mathrm{kg}] \times (-4)\ [\mathrm{m/s^2}] = -3200\ [\mathrm{N}] \tag{3.13}$$

よって車に働く力の最大値の大きさは 3200 N である。

■

[例題 3.2] 質量 m の質点が時刻 $t=0$ に原点に静止していた。この質点に以下のような力がはたらいた。

- $0 \le t \le t_1$ の間，一定の力がはたらいた。この力の大きさを F とする。
- $t_1 < t \le t_2$ の間はそれまでと逆向きに，同じ大きさ F の力がはたらき，t_2 において質点は原点に戻ってきた。

この質点についての運動について以下の問に答えなさい。

(1) 質点が動き出した後，速度が 0 になる時刻を t_1 を使って表しなさい。
(2) 質点が原点に戻ってくる時刻 t_2 を t_1 を使って表しなさい。
(3) 時刻 t_1 から t_2 における加速度，速度，位置の時間変化をグラフに示しなさい。
(4) 質点の加速度の向きと運動の向きが異なるのはいつか。グラフを見て答えなさい。
(5) 質点の速度が 0 になるのは，質点がどのような位置にあるときか。
(6) 質点の速度が 0 になる時刻は，グラフのある面積に注目すると幾何学的に求めることができる。このことを説明しなさい。
(7) 質点が原点に戻ってくる時刻は，グラフのある面積に注目すると幾何学的に求めることができる。このことを説明しなさい。

[解説]

物体の運動を議論するときにはまず座標軸を定義する。座標軸は指定がなければ自由に，しかし運動を記述しやすいと思う向きに定義する。ここでは，$0 \le t \le t_1$ の間に働いた力と同じ向きに x 軸を定義する (図 3.4) [*]。質点の運動方程式を書くときには，**座標軸の向きと同じ向きの力を正の力，逆向きの力を負の力**（座標軸の負の方向に加速度を生じさせる力）として記述する。

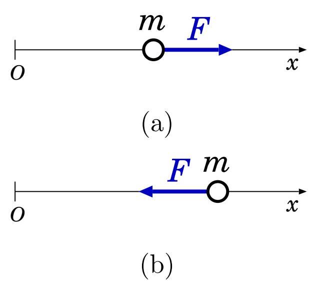


図 3.4 質点と力。(a) $0 \le t \le t_1$ に働く力。(b) $t_1 \le t \le t_2$ に働く力。

[*] 逆向きに定義して議論しても構わない。両方の向きでこの問題を解いてみると良い勉強になる。

(i) $0 \le t \le t_1$ **の間の運動**

運動方程式は次式になる。

$$m\ddot{x} = F \tag{3.14}$$

両辺を m で割ると加速度が得られる[†]。

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \tag{3.15}$$

[†] **この加速度を与える式を運動方程式として書いてはいけない。**なぜなら，この式を運動方程式として書くと，質量 1 の物体が F/m の力を受けて運動していることを表すことになる。数学的に等価であってもその意味が変わってしまう。

両辺を積分すると速度が得られる。

$$\int \ddot{x}dt = \int \frac{F}{m}dt$$

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + C \quad (C : 積分定数) \tag{3.16}$$

上式より $\dot{x}(0) = C$ であるが，題意より $\dot{x}(0) = 0$ なので $C = 0$ であることがわかる。よって

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t \tag{3.17}$$

さらに積分すると

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C \quad (C:\text{積分定数}) \tag{3.18}$$

上式より，$t = 0$ における物体の位置は $x(0) = C$ であるが，題意より $x(0) = 0$ なので $C = 0$ であることがわかる。よって質点の位置は次式で与えられる。

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \tag{3.19}$$

(ii) $t_1 \leq t \leq t_2$ の間の運動

運動方程式は次式になる。

$$m\ddot{x} = -F \tag{3.20}$$

力の向きが座標軸の向きと逆なので力の符号が負であることに注意せよ。

両辺を m で割ると加速度が得られる。

$$\ddot{x} = -\frac{F}{m} \tag{3.21}$$

両辺を時間で積分すると速度が得られる[*]。

[*] 積分計算に慣れていないヒトはここで

$$\dot{x} = -\frac{F}{m}t + C \tag{3.22}$$

として計算をしてもよい。定数項が異なるだけであるのでどちらを微分しても式 (3.21) になることを確認せよ。式 (3.23) を用いたほうが積分定数 C を求めるのが容易になる。

$$\begin{aligned}\int \ddot{x}dt &= \int -\frac{F}{m}dt \\ \dot{x} &= -\frac{F}{m}(t - t_1) + C \quad (C:\text{積分定数})\end{aligned} \tag{3.23}$$

上式から求められる時刻 t_1 における速度 $\dot{x}(t_1) = C$ と，式 (3.17) よる $\dot{x}(t_1) = \frac{F}{m}t_1$ は互いに等しくなくてはいけないので，$C = \frac{F}{m}t_1$ であることがわかる。よって，質点の速度は次式で与えられる[†]。

[†] 式 (3.24) は $\dot{x} = -\frac{F}{m}(t - 2t_1)$ としてもよいが，今後の変形のためあえてこのままにしておく。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{F}{m}(t - t_1) + \frac{F}{m}t_1 \\ &= -\frac{F}{m}\left\{(t - t_1) - t_1\right\}\end{aligned} \tag{3.24}$$

さらに積分すると次式が得られる。

$$x = -\frac{F}{m}\left\{\frac{1}{2}(t - t_1)^2 - t_1(t - t_1)\right\} + C \quad (C:\text{積分定数})$$

上式より $x(t_1) = C$ であるが[‡]，式 (3.19) より $x(t_1) = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2$ なので，$C = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2$ を得る。よって

[‡] 式 (3.24) を $\dot{x} = -\frac{F}{m}(t - 2t_1)$ としたなら，$x = -\frac{F}{m}(\frac{1}{2}t^2 - 2t_1t) + C$

$$\begin{aligned}x &= -\frac{F}{m}\left\{\frac{1}{2}(t - t_1)^2 - t_1(t - t_1)\right\} + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2 \\ &= -\frac{F}{2m}\left\{(t - t_1)^2 - 2t_1(t - t_1) - t_1^2\right\}\end{aligned} \tag{3.25}$$

以上で，設問に答える準備ができた。順に答えていこう。

(1) 質点が動き出した後，速度が 0 になる時刻を求める。

$0 \le t \le t_1$ の間は速度 0 から加速を続けているので速度が再び 0 になることはない。このことは式 (3.17) を見ても確認出来る。一方 $t > t_1$ ではそれまでと逆向きに加速するので，やがて速度が 0 になる瞬間がある。速度を与える式 (3.24) において $\dot{x} = 0$ を満たす時刻を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{F}{m}\{(t - t_1) - t_1\} \\
t &= 2t_1 \quad \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

この結果から，力の向きがかわるまでの時間と，その後速度が 0 になるまでの時間が等しいことがわかる。

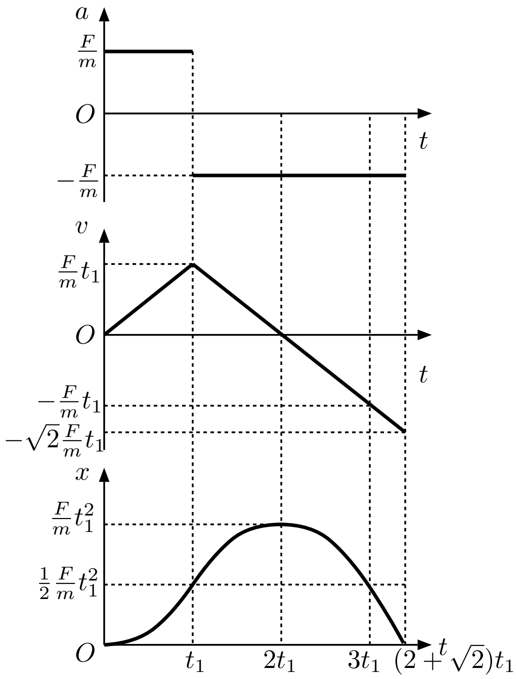


図 3.5　質点の運動

(2) 質点が再び原点に戻ってくる時刻を求めるには，式 (3.25) において $x(t) = 0$ を満たす t を求めれば良い。すなわち

$$
0 = -\frac{F}{2m}\left\{(t - t_1)^2 - 2t_1(t - t_1) - t_1^2\right\} \tag{3.26}
$$

$T = t - t_1$ とおくと

$$
T^2 - 2t_1T - t_1^2 = 0
$$

解 T を求めると

$$
T = (1 \pm \sqrt{2})t_1 \tag{3.27}
$$

$T = t - t_1$ より，

$$
\begin{aligned}
t &= T + t_1 \\
&= (1 \pm \sqrt{2})t_1 + t_1 \\
&= (2 \pm \sqrt{2})t_1
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

質点が原点に戻る時刻は $t > t_1$ なので，求める時刻 t_2 は次式の通り[*]。

$$
t_2 = (2 + \sqrt{2})t_1 \quad \cdots (\text{答})
$$

[*] $t = (2 - \sqrt{2})t_1$ がどのような時刻を表しているか考えよ。

(3) 質点の加速度は式 (3.15)(3.21)，速度は式 (3.17)(3.24)，位置は式 (3.19)(3.25) で与えられる。グラフにすると図 3.5 の通り。

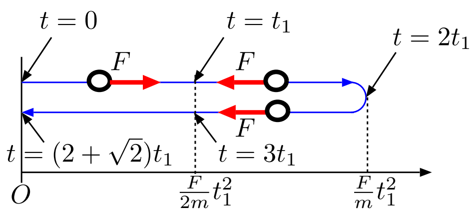


図 3.6　質点の運動方向（細い矢印）は力の向き（太い矢印）としばしば異なる。

(4) 運動の向きは速度の正負で判断できる。速度と加速度の向き（正負）

が異なるのは $t_1 < t < 2t_1$ のとき。このとき力は質点の運動に対してブレーキとして働いている (図 3.6)。

(5) 質点は $t_1 < t < 2t_1$ において減速しながら x 軸方向にすすんでいるが，ちょうど $t = 2t_1$ になったときに進行方向を変える (図 3.6)。この進行方向がかわる瞬間が $v = 0$ となる時であることが図 3.5 よりわかる。

(6) 速度は加速度の積分によって求めることができる（2.5.2 節参照)。すなわち

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt + v(0) \tag{3.29}$$

本問では $v(0) = 0$ なので，

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t a(t)dt \\ &= \int_1^{t_0} a(t)dt + \int_{t_1}^t a(t)dt \end{aligned} \tag{3.30}$$

右辺第一項は加速度のグラフにおいて $a > 0$ となる長方形の面積であり，第二項は $t_1 \sim t$ における負の面積を意味する。両者の面積が等しくなる時がちょうど $v = 0$ になるとき。いずれの長方形も高さは等しいので，底辺の長さが等しくなるときに速度は 0 になる (図 3.7)。

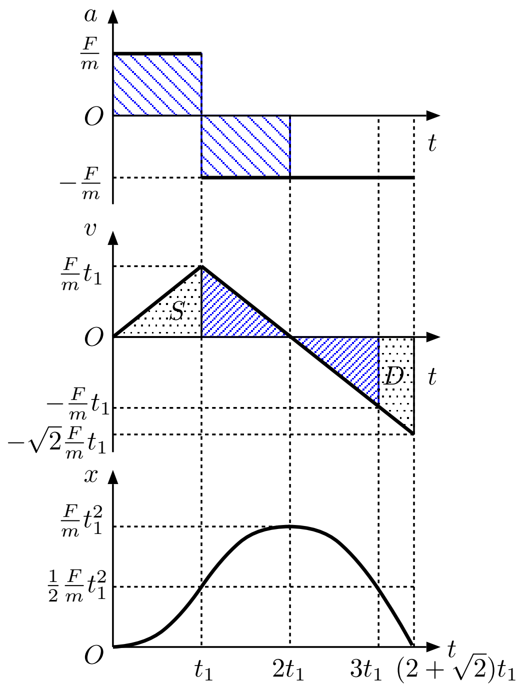


図 3.7 質点の運動

(7) 速度を積分して位置を求めると次式になる。

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt + x(0) \tag{3.31}$$

本問では $x(0) = 0$ なので，

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt \tag{3.32}$$

すなわち，速度 $y = v(t)$ と t 軸の間の面積を $t = 0$ より足していったとき，その和がちょうど 0 になる時刻が $x = 0$ になる時刻 t_2 である。これはすなわち図において三角形 S と台形 D の面積が等しくなるときを意味する (図 3.7)。

■

3.4.6 プリンキピアによる「運動の第二法則」の表現 *

ニュートンの運動方程式は，現在は式 (3.1) のように書かれることが多いが，本来のニュートンによる表現は少々違っている。プリンキピアでの**運動の第ニ法則**によると，

> **運動の変化は加えられた起動力に比例し，かつその力が働いている直線の方向にそって行われる** [16]。

また，ニュートンは**運動の量**について次のように書いている。

> **運動の量とは，速度と物質の量との積で計られるものである** [16]。

よって本来のニュートンの表現を忠実に定式化すると次式になる。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F} \tag{3.33}$$

ここで，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ は**運動量** (linear momentum もしくは単に momentum) と呼ばれる量である。上式は，外力が働かない場合の運動，すなわち**慣性運動においては運動量が変化しない**ことを表しており，これは力学の第一法則を本質的に拡張したものである。さらに外力が働く場合には，**物体の運動量の変化は，はたらく力の向きと同じ方向であり力の量に比例する**。言いかえると，ある物体が慣性運動と異なる運動を行っている時には，その物体には力が働いているということになる。物体の質量が運動中に変化しない場合には，この式から式 (3.1) が導かれる。物体の質量が運動中に変化しないという仮定は，物体が途中で壊れたりしない限り当然のように思われるかもしれないが，この仮定はアインシュタインの登場によって否定され，式 (3.1) はアインシュタインによって書き直されることになる。しかし，相対論的速度で動く物体についても外力が働かない限り運動量は一定である。さらに複数の物体が相互作用するときにも運動量の総和は常に一定である[*]。

[*] 詳しくは 6.1 節参照。相対論的速度のときの議論は本書ではしない。

[問 **3.4**] 外力を受けないで運動している物体の質量がもしも時間とともに減るなら，その物体はどのような運動を行うか?

3.4.7 力の定義としての運動方程式 *

3.3 節でも触れたが，**力**というものの明確な定義は難しい。ニュートンにより式 (3.1) のような関係が定式化されたということは，力 **F** というものの概念および定量化の方法をニュートンがなんらかの形で確立していたことを意味する。しかし，この式 (3.1) の見方を変えると**力**というものの定義を与えていると考えることができ，実はそのほうが**力**というものを明らかにする上で好都合である。実際「**プリンキピア**」によると

> 作用力と言うのは静止の状態または直線的な等速運動の状態を変えるように物体の上に働く一つの作用である。この力はただ作用のみから成立していて，作用が終ったときには既にその物体に残ってはいない。なぜなら物体はそれの得た新しい状態をしばらく保有するが，これはただそれの慣性によるものであるからである[†]。

[†]「物理学はいかに創られたか」アインシュタイン著 [9], p.14 より

とあり，ニュートンが力というものを物体の運動から演繹して生じる概念と捉えていることがわかる。ニュートン以前では，物体が地面に落ちるのは物体自身が持つ性質であると考えられていた。ニュートンは「**力**」という概念を確立し，物体が等速度運動を行わないときには必ず力が働いていると考えたわけである。このこと

は万有引力の発見と必然的に結び付く。

ニュートンの運動方程式によると，ある物体に加速度が生じているとき，その物体には外力が働いていると考える。そして**力の向きは物体に働く加速度の向きと同じ**であり，**力の大きさは物体の「質量」と「加速度」の積により表される**と定義する。したがって**力**の単位量は**質量**，**距離**，**時間**の定量的原器によって定められることになる。

3.4.8 運動の第二法則のまとめ

我々が物理現象を観察するとき，力の存在は運動から演繹して判断するものであることをこれまでに説明してきた。一方で，我々が物理現象を理論的に考察するときには慣性空間を想定し，まず物体に働く力を列挙してから運動を導き出すという手順をふむことは，よく頭にいれておく必要がある。

3.5 万有引力

3.5.1 重力加速度と重さ

真空中で落下にかかる時間は物体の重さによらず，またその運動が等加速度運動であることはガリレイが説明した通りである。そして，その重力による落下の加速度の大きさは，測定実験により約 9.8 m/s^2 であることがわかっている。この値を**重力加速度の大きさ** (gravitational acceleration) とよび，慣習的に記号 g で表す。すなわち $g \simeq 9.8$ m/s^2 である。

この落下運動に観察される加速度が物体間にはたらく**万有引力** (universal gravitation) によると考えたのがニュートンである。質量 m の物体と地球の間に大きさ F の万有引力が働くとして，運動方程式を書いてみよう。図 3.8 のように鉛直下向きを座標軸の正の向きとすると運動方程式は次式になる。

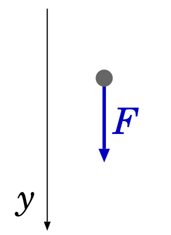


図 3.8 重力の影響 F を受けて運動する物体

$$m\ddot{y} = F$$

ここで，$\ddot{y} = g$ であるから次式が得られる。

$$F = mg \tag{3.34}$$

上式より，**物体に働く万有引力の大きさ F は物体の質量 m に比例する**ことがわかる。

このように質量 m の物体が万有引力により地球から受ける力 $F = mg$ のことを**重力**[*]，そしてその力の大きさを**重さ** (**重量**, weight) とよび，**質量 1 kg の物体の地上での重さを 1[kgw](キログラム重)** [†] と表す。つまり 1 kg の物体に働く重力の大きさは

$$1 \text{ kgw} = 1 \text{ kg} \times 9.8 \text{ m/s}^2 = 9.8 \text{ N}$$

である。このことから 10 N の力の大きさは，1 リットルの牛乳パックを持つときに手のひらに感じる力の大きさとほぼ等しいことがわかる。重さは，大変紛らわし

[*] より一般的には，ある天体上で物体がその天体により受ける力のことを重力と呼ぶ。その力は厳密には万有引力と天体の自転に伴う遠心力の合力である。

[†] 正確には，1 kgw とは「質量 1 kg の物体に 9.80665 m/s^2 の加速度を与える力の大きさ」と国際度量衡総会により定義されている

いことに質量と同じ kg という単位で表されることも多い。重さが実は力の大きさであることは，日常使われる秤の多くが，バネの力[‡] とのつりあいの位置によって重さを決めていることからも理解できる。

[‡] バネの縮み量はバネにかかる力に比例するので，バネは力の計測には絶好の道具である。

ニュートンは運動方程式や万有引力の発見の過程で，日常的に感じる物体の重さという量と質量を分離し，一方は力，一方は物体の持つ量であるとした。これは大発見である。当時は，光や力を伝える媒介として**エーテル** (aether, ether) の存在が唱えられており，デカルトはエーテルの渦が惑星を動かしていると考えていた [4]。ニュートンは，エーテルような力を伝える媒質の渦を考えると，それは惑星や彗星の規則性の高い運行に対して妨げになり得ると考えた。ニュートンのすごい点は，このようにエーテルのような力の媒介の存在は否定した上で，それにもかかわらず地球とリンゴや，太陽と惑星といった 2 つの物体間には引きつけあう力がはたらいていると認めた点である。幼少期にデカルトと交流があった物理学者ホイヘンス (p.15) は，このようなニュートンの万有引力のアイデアを「馬鹿げた考え」と批判し，ライプニッツはニュートンのアイデアは認めつつも，等速円運動ではない惑星の運行を説明するには力を与える媒質の存在を認めるべきと反論した [4]。その後エーテルの存在が否定されたのは，プリンキピア発刊後約 200 年たった 1887 年に発表されたマイケルソンとモーリーの実験による。ちなみに「エーテル」は現在のコンピュータネットワークの「イーサネット」の語源である (wikipedia(ja) の「エーテル」の項より)。

練習問題 3.1

(1) 重力のはたらかない宇宙空間で，物体の質量を測る方法を何種類か考えよ。
(2) 1 [N] とはどの程度の大きさの力であるかを，できるだけわかりやすく説明せよ。(小学生が実感として体験できるような表現を考えること）

練習問題 3.2 地表の高さ (地球の中心からの距離) は場所によって異なる。また，地上の物体は地球の自転による遠心力の影響も受けている (7.7 節参照)。このため，重力加速度の大きさは，地球上でも場所によって異なる。よって，1 つの体重計を世界各地に持っていって体重を計ると，場所によって違う体重が表示されることになる。これでは不便なので，体重計メーカは各地の重力加速度にあわせた目盛りの設定を行っている。例えば，オムロンの家庭用体重計は，日本を南北の 2 ゾーンに分けて設定を行うようになっている (カラダスキャン HBF-362 の利用説明書による)。

(1) 重力加速度が $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ の地球上で体重を測るとが 60 kgw と表示された。この体重計を、重力加速度が地球上の約 1/6 の月に持って行って体重を図ると何 kgw と表示されるだろう。
(2) 沖縄での重力加速度の大きさは約 $9.789 \sim 9.792\ \mathrm{m/s^2}$, 北海道では $9.803 \sim 9.807\ \mathrm{m/s^2}$ である。北海道で体重を計ったら 60 kgw と表示された体重計を使って沖縄で体重を計ると最大何 gw の差が生じるだろう。体重計はバネを用いて身体と地球の間に働く万有引力を計るタイプのもの（通常市販されているもの）を用いるとする。

(3) 場所によらず物体の質量を正確に測定するにはどのような秤を使うのがよいだろうか?

3.5.2 万有引力の法則

ケプラー[*] は優れた天体観測を多く行った**チコ・ブラーエ**[†] に弟子入りし，チコ・ブラーエの死後に彼の莫大な天体観測データをうけつぎ, その解析によって天体の運動に関する次のような 3 つの法則を発表した。

(1) 惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。
(2) 惑星と太陽とを結ぶ線分の描く面積は単位時間あたり常に一定である（面積速度一定）。
(3) 惑星の公転周期の 2 乗は軌道の半長径の 3 乗に比例する。

ニュートン 24 才の頃，天体間に距離の 2 乗に反比例する力が働くと考えばこれらの法則を説明できることに気づいた[‡]。さらにニュートンは，この天体間に働く力が地上の物体の落下の原因でもあると考えた。つまり，リンゴが地面に落ちるのも，月が地球から離れて飛んで行ってしまわないで地球のまわりを回るのも (図 3.9)，根本的に同じ理由であると考えたわけである[§]。こうして発見された万物の間に働く力が**万有引力**である。

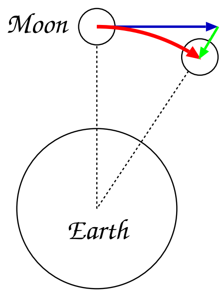


図 3.9　万有引力が無ければ月は地球から離れていくだろうが (青線)，地球との間に働く万有引力のために月は地球に落下し続けている (緑線)。結果として月は地球の周りを回っている (赤線)。

3.5.1 節で述べたように，地上での物体の落下運動は, 物体の質量に比例する力 mg を仮定すると説明できることから，２つの物体間に働く万有引力の大きさ F は各物体の質量に比例すると考えられる。さらに，その力の大きさが物体間の距離 r [¶] の 2 乗に反比例すると考えられるならば (図 3.10)，その定量的表現は次式で与えられる。

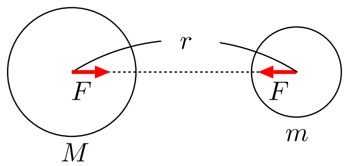


図 3.10　２つの物体間には，大きさで等しく，互いに引きつけ合う向きの万有引力が働く

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{3.35}$$

ここで，G は比例定数であり**万有引力定数**[||](gravitational constant of universe) と呼ばれる。M と m はそれぞれ 2 つの物体の固有の量であり，**重力質量**と呼ばれる。これが**ニュートンによる万有引力の法則**を表す式である。

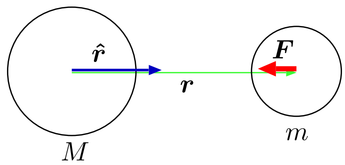


図 3.11　質量 M の物体から質量 m の物体が受ける万有引力 $\boldsymbol{F}$ の向きは，質量 M の物体に対する質量 m の位置を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ の向きと逆である。

質量 m の物体が質量 M の物体から受ける万有引力を，力の向きも含めて表すと次

[*] ケプラー (Johannes Kepler, 1571-1630, 独) は天体の運航に関する研究で有名だが，微積分や対数に関する先駆的な研究を行う他，占星術に関する研究も行っていた。

[†] Tycho Brahe, 1546-1601, デンマーク

[‡] チャンドラセカール [16] p.1 より

[§] ケプラー以前は天体の運動は神が設計した幾何学的なプランによるものであり，物理学とは無関係な現象と考えられていた ([30] p.681)。この天体の進行が力によるものと考えて物理学と関連づけたのがケプラーである。しかし，ここで考えられた力は天体のみがもつ生命力のようなものとケプラーは捉えており (同 p.696)，天体の運動が地上の運動と結びつけられることはなかった。なお，ニュートンが月やリンゴの運動をどのように捉えて解析したかに関する経緯はチャンドラセカールによるプリンキピアの解説書 [16] の 1 章に詳しく書かれている。

[¶] より正確には物体の重心間の距離である。重心の説明は 6.4 節で行うが，球体であればその中心を意味する。

[||] 後の節で述べるように，この定数の決定は非常に困難である。2000 年 5 月のワシントン大の発表によると $G = 6.672 \times 10^{-11}$ [m^3/kg·s^2] である。

式になる (図 3.11)。

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{3.36}$$

ここで，ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$ は物体 M に対する物体 m の方向を示す単位ベクトルであり[*]，ベクトル $\boldsymbol{F}$ は後者が前者からうける力を示す。この式は，

> **２つの物体間にはたらく万有引力の大きさは互いに等しく，向きは互いに逆 (引き合う方向) である**

ことを意味する。これは「力学の第三法則」（3.8 節）の礎でもある。

重力質量 (gravitational mass) は引力の大きさを決定する物体の量であるから**慣性質量**とは**本質的に異なる概念**である。電荷による力のように特定の物質間にしか観察されない力もあるのだから，万有引力が働かない (観察できない) 物質もあるかもしれない。万物に万有引力が働くとしても，その大きさが加速のしやすさを表す慣性質量に一致するとは限らず，もしかすると慣性質量の 1.00⋯001 乗といった量に比例する可能性もある。しかし，両者の値はこれまでに得られた実験精度内で完全に比例関係にあることが知られており，その比例定数が 1 になるように万有引力定数の値は与えられている。このため重力質量と慣性質量は区別せずに単に**質量** (mass) とよぶことが多い。また，このように両者が完全に比例関係にあることを**等価原理** (equivalence principle) [†] という。

万有引力の性質は実に単純な形で表現されているが，その一方で，万有引力はなぜ存在するのか，どうして物理的接触の無い物体間に力が働くのか[‡]，その力の源泉は何なのかという謎が残る。ニュートンはこのような核心については目をつむったまま，表象に現れる定量的性質を経験的事実としてそのまま受け止めたようである。アインシュタインはこの謎に踏み込み，エネルギーと質量は同等なものであると考えた。したがって重力の源泉はエネルギーということになるが，こう言われるとますますその正体がよくわからない気分になる。その原因はおそらく，エネルギーという概念的なものが，質量という実在として捉えてしまいがちなものと同等に扱われる点にある。そもそも，ニュートンの運動方程式も，力という概念を物体の運動に結びつけているという点では同様に不可解なものである。このような「力」「質量」「エネルギー」等々といった言葉が意味する概念が実感を伴うようになるためには慣れが必要であるが，同時に，その言葉にリアリティを持たせるような空想力も物理の議論ではとても重要である。

[*] ベクトル $\hat{\boldsymbol{r}}$ は，一方の物体を基準としてもう一方の物体の位置を示す位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いると $\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書くこともできる。

[†] ニュートンはプリンキピアで，等価原理が成り立つことを惑星の観測データに基づいて説明している。

[‡] 物理的接触があるように見えても，分子レベルで見れば接触していない。すなわち，我々は日常の体験により得られた**接触**という概念に考え方を拘束されてしまっているだけと考えることもできる。しかし，そのようにして問題を片付けてしまうことは，力はどのように伝わるかという問題から逃げていることにもなる。

[例題 3.3] 質量 100 kg の 2 個の小さな物体を 30 cm 離しておいた。物体間に働く万有引力の大きさはどの程度だろうか? $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3/kg·s^2 として概算しなさい。また，小学生でも実感がわくような説明をいくつか試みなさい。

[解説] 万有引力の法則より，物体間に働く引力は以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
F &= 6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg{\cdot}s^2} \times \frac{(100\ \mathrm{kg})^2}{(3.0 \times 10^{-1}\ \mathrm{m})^2} \\
&= 6.7 \times 10^{-11} \times \frac{1.0 \times 10^4}{9.0 \times 10^{-2}}\ \mathrm{m{\cdot}kg/s^2} \\
&\simeq 7.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

ちなみに，メダカの卵 1 個 (約 1 mgw) を手のひらに載せた時に感じる重さは

$$
\begin{aligned}
1\ \mathrm{mgw} &= 9.8\ \mathrm{m/s^2} \times 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{kg} \\
&\sim 1 \times 10^{-5}\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

なので，さらにこれよりも少し小さいということになる。

[解説] 万有引力によって物体間に働く力は，日常の身の回りで感じる多くの力に比べははるかに小さい。このため万有引力定数の決定は大変困難であり，現在求められている万有引力定数の精度 (有効数字 5 桁程度) は，他の物理定数に比べ精度が悪い (素電荷，電子の質量，アボガドロ数：有効数字 7 桁程度)。

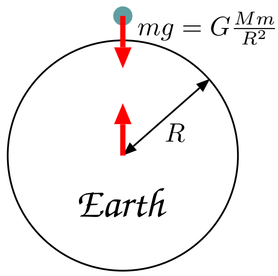


図 3.12 地表付近の物体に働く万有引力。地球の中心から物体までの距離は厳密には地球の半径と異なり，また，地球も厳密には球体ではないが，ここでは近似的に地球を半径 R の球と考え，地表から物体までの距離は半径 R に比べて無視できるとする。

3.5.3 重力加速度と万有引力定数

万有引力の大きさに関する式として，地表面付近の物体が地球から受ける重力を表す式 (3.34) と，2 物体間に働く万有引力の大きさを表す式 (3.35) を紹介した。両者にはどのような関係があるかを考えてみよう。

式 (3.34) は地表面付近，すなわち地球の中心から地球の半径 R の距離において成立するので，式 (3.35) との間に次の等式が成り立つ (図 3.12)。

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \tag{3.37}$$

ここで，M と m はそれぞれ地球及び地表の物体の質量であり，R は地球の半径である。すなわち重力加速度の大きさと万有引力定数は次の関係式を満たす。

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{3.38}$$

上式は，重力加速度は物体の質量 m によらないことを示している[*]。

[*] 式 (3.37) の左辺の質量は本来慣性質量を意味するものであり，右辺の m は重力質量を意味するものである。もし慣性質量が重力質量に完全に比例する量で無ければ，すなわち**等価原理**が成立しなければ，重力加速度が物体の質量によらないことを示す式 (3.38) は得られず，質量により物体の落下速度が変わってしまうことになる。

3.5.4 地球の重さ秤

地球上にある質量 m の物体に働く力 F と，地球の半径 R と，**万有引力定数** G がわかれば，式 (3.38) より地球の質量 M を求めることができる。地球の半径 r は次節で述べるように紀元前から見積もられていた。一方，万有引力定数の推定は今日でも困難な実験の一つである。これを初めて行ったのはイギリスの**キャベンディッシュ**[*] であり，プリンキピアの約 100 年後の 1798 年に論文として発表された*4。

図 3.13 キャベンディッシュによる万有引力定数の測定（Wikimedia commons より）

[*] キャベンディッシュ (Henry Cavendish，1731-1810, 英) は資産家であった貴族の子であり，その資産によって生涯自宅で趣味として研究を続けたが，存命中は業績もごく一部しか公表しなかった。1874 年にキャベンディッシュの一族による寄付で，ケンブリッジ大学にキャベンディッシュ研究所を設立。初代研究所長であったマクスウェルが数年かかってキャベンディッシュのノートを整理した結果，クーロンの法則やオームの法則その他様々な発見を先駆けて行っていたことが明らかになった。

キャベンディッシュは地球の密度を見積もるため，外界と遮断された小部屋を作り，室内の温度差による対流も十分排除した上で，非常に軽い天秤をつるした。天秤の両端には小さな鉛の玉をつけ，地上に固定した重い鉛の玉を近付けた。そうすると天秤は小さく回転し，回転角度から万有引力の大きさをはかることができた[†]。その結果によってはじめて万有引力定数の決定が可能になり，地球の質量・密度を求めることも可能になった。キャベンディッシュはこの秤を「**地球の重さ秤**」と名付けた。地上の実験室で地球の質量を測る秤を作れるとは，実に面白いと思う。ちなみにキャベンディッシュのデータに基づく万有引力定数の値は $G = 6.75 \times 10^{-11}$ m^3/kg·s^2 であり，現在得られている値 $G = 6.672 \times 10^{-11}$ m^3/kg·s^2 に非常に近い。では，キャベンディッシュにならって地球の質量を計算していこう。

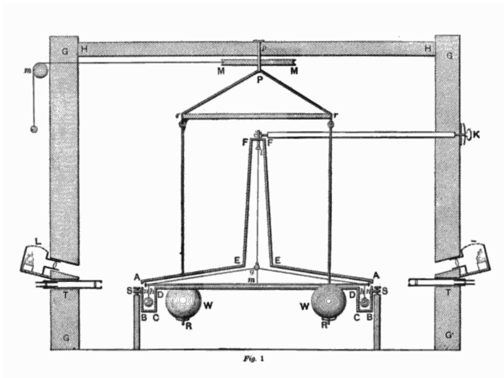


図 3.14 キャベンディッシュによる地球の重さ秤 [2]

[†] ファインマン物理学 p.102[17] 参照

地球の大きさの測りかた

時は紀元前，エジプトの都市シエネでは，夏至の日の太陽は南中時に完全に頭上にのぼり，井戸は奥底まで明るく照らされることが知られていた。**エラトステネス**[‡] は，同じく夏至の日の南中時に，都市アレキサンドリアで垂直にたてた棒の影を観察したところ，太陽は天頂から南に 7.2 度のところにあることがわかった。当時アレキサンドリアとシエナ間の貿易はさかんであり，一日約 18.5 km の移動をできるラクダで片道 50 日かかる距離であった。また，シエナはアレキサンドリアから，ほぼまっすぐ南下した位置にあった。これらのことからエラトステネスは地

[‡]Eratosthenes, BC275 頃-BC195 頃。エジプトで活躍したギリシャ人の学者

*4 [2, "Experimentws to Determine the Density of the Earth", Philosophical Transactions of the Royal Society of London]

球の形は球形であると考え，**地球の周の長さ**を求めた。

[例題 3.4] 上記のデータに基づいて，地球の半径を求めてみなさい。

[解説] エラトステネスの方法によると、地球の周の長さ L は次のように見積もれる。

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{360^\circ}{7.2^\circ} \times 18.5 \text{ km/day} \times 50 \text{ day} \\ &\simeq 4.6 \times 10^4 \text{ km} \end{aligned}$$

よって、地球の半径 R は以下のように見積もられる。

$$R = \frac{L}{2\pi} \simeq 7.3 \times 10^3 \text{ km}$$

現在知られている地球の半径は $R = 6.4 \times 10^3$ km [*] なので、2 割程度の誤差で地球の半径は紀元前に見積もられていたことになる。

[*] より厳密には地球の赤道半径は 6378.137 km, 極半径は 6356.752 km であり、前者のほうが若干長い。

地球の質量

いよいよ地球の質量を求めてみよう。

[例題 3.5] 以下の問に答えなさい。

(1) 地球の質量 M を，地表での重力加速度の大きさ g，万有引力定数 G, 地球の半径 R を用いて表しなさい。

(2) 地表での重力加速度の大きさが $g \simeq 9.8$ $[\text{m/s}^2]$ であることと，これまでに明らかになった地球の大きさ，万有引力定数 $G = 6.672 \times 10^{-11}$ $[\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2]$ をもとに，**地球の質量**および密度を概算しなさい。

[解説] **(1)** 地表上にある質量 m の物体に働く重力は、重力加速度を用いると mg, 万有引力定数 G を用いると GmM/R^2 となる。この両者の値は等しいので次式が成り立つ。

$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$

これを変形すると次式を得る。

$$M = \frac{g}{G}R^2$$

(2) 例題例題 3.4 で求めた、エラトステネスによる地球の半径の見積値を使うと、地球の質量は以下のようになる。

$$\begin{aligned} M &= \frac{9.8 \ [\text{m/s}^2]}{6.672 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2} \times (7.3 \times 10^3 \times 10^3 \text{ m})^2 \\ &= 7.8 \times 10^{24} \text{ kg} \end{aligned}$$

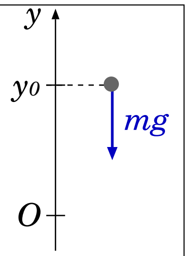
また、現在知られている地球の半径 $R = 6.4 \times 10^3$ km を使うと $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg になる。

上の例題のように、地球の質量を知るには万有引力定数の値が必要である。しかし万有引力定数の値は非常に小さいため，その値を正確に求めることは大変難しく、現在でもその値はたびたび更新されている。そしてそのたびに，地球の質量の見積もり値は変動している。現在地球の質量として知られている最新の値は $M = 5.972 \times 10^{24}$ kg である (2000 年 5 月のワシントン大の推定による)。

3.5.5 自由落下・放物運動

重力のみによる物体の落下運動を**自由落下**とよぶ。また，地上で投げられた物体の運動を**放物運動**とよぶ。どちらも重力下での運動である点で同様だが，前者は地上から離れた人工衛星や月等の運動も指す。また，前者は，鉛直落下運動に限定した用語として使われることもある。

[例題 3.6] 図のように，鉛直上向きに y 軸をとり，原点 $y = 0$ m を地表の高さとする。y_0 の高さから質量 m の小石を初速度 v_0 で鉛直方向に投げた。小石を落とした瞬間を $t = 0$, 重力加速度の大きさを g とする。



(1) 落下中の小石の運動方程式を書きなさい。
(2) 運動方程式を時間で積分することによって，小石の速度および位置の時間変化を表す式を導きなさい。
(3) $y_0 = 20$ m で小石の初速度が $v_0 = 0$ m/s のとき，小石が地表に落ちるまでの時間を求めなさい。また，この時間が小石の質量に依存するか否かを説明しなさい。($g \simeq 10$ m/s^2 として概算してよい。)
(4) $y_0 = 20$ m で，小石が地表に落ちるまでの時間が 1 s だった場合について初速度 v_0 の値を求めなさい。また，その符号から $t = 0$ における小石の運動の向きが上下どちら向きであったかを述べなさい。

[解説] (**1**) 小石の運動方程式は以下の通り[*]。

$$m\ddot{y} = -mg \tag{3.39}$$

重力の向きが座標軸の負の向きなので，右辺の mg に'$-$' がついていることに注意せよ。

(**2**) 運動方程式 (3.39) の両辺を m で割り，さらに積分をすることにより，順次速

[*] 運動方程式を $\ddot{y} = -g$ と書かないこと。

度と位置を得ることができる。

$$\int \ddot{y}dt = \int(-g)dt$$
$$\dot{y} = -gt + C_1 \tag{3.40}$$
$$\int \dot{y}dt = \int(-gt) + C_1 dt$$
$$y = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \tag{3.41}$$

式 (3.40)(3.41) より，時刻 $t = 0$ での小石の速度と位置は

$$\dot{y}(0) = C_1, \qquad y(0) = C_2 \tag{3.42}$$

とする。一方，題意より $\dot{y}_0(0) = v_0$, $y(0) = y_0$ を上式と比べると $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$ であることがわかる。この結果を式 (3.41) に代入すると

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \quad \cdots (答) \tag{3.43}$$

(3) $y_0 = 20$ m, $v_0 = 0$ m/s を式 (3.43) に代入し，$y(t) = 0$ m となる時刻 t を求める。

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + 20 \text{ m}$$
$$t^2 = \frac{2 \times 20 \text{ m}}{g}$$
$$= \frac{2 \times 20 \text{ m}}{9.8 \text{ m/s}^2}$$
$$\simeq 4 \text{ s} \tag{3.44}$$

以上より $t \simeq 2$ s を得る。この値は小石の質量 m にはよらない。 $\cdots$(答)

(4) 式 (3.43) を v_0 について解くと，

$$v_0 = \frac{y - y_0 + \frac{1}{2}gt^2}{t} \tag{3.45}$$

上式に $y_0 = 20$ m, $t = 1$ s を代入し，$y(1) = 0$ m となる初速度 v_0 を求める。

$$v_0 = \frac{0 \text{ m} - 20 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (1 \text{ s})^2}{1 \text{ s}}$$
$$\simeq -15 \text{ m/s} \quad \cdots (答) \tag{3.46}$$

$v_0 < 0$ なので，$t = 0$ での小石の運動の向きは座標軸の負の方向すなわち下向きであったことがわかる。 $\cdots$(答)

■

[例題 3.7] 質量 m のボールを，水平面に対して角度 θ 上方に向けて，初速度 v_0 で投げた。空気抵抗は無視して以下の問に答えよ。座標軸は，水平方向に x 軸をとり，その正の方向はボールを投げ出した方向とする。また，鉛直上向きに y 軸をとり，ボールを投げ出した位置を原点，重力加速度の大きさを g とする。

(1) ボールの運動方程式をたてよ。

(2) 運動方程式より，ボールの位置 (高さおよび水平方向に飛んだ距離) を時間 t の関数として表しなさい。

(3) ボールの軌道が二次曲線を描くことを示しなさい。

(4) ボールが地面に落ちる ($y = 0$) 時刻を求めなさい。

(5) ボールが地面に落ちるまでに飛ぶ距離を求めなさい。

(6) ボールを水平方向に一番遠くまで投げるには，どのような角度で投げるのがよいか? また，このときのボールの飛距離はどれだけか?

(7) 初速度 30 m/s でボールを投げることのできる人が遠投に挑戦した。最長で何 m 投げられるだろうか?

[解説]

(1) ボールには重力のみが働くので (図 3.15)，運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= -mg \end{cases} \quad \cdots(答) \tag{3.47}$$

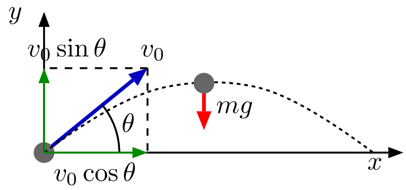


図 3.15

(2) 運動方程式の各式の両辺を m で割り，時間で積分すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{x} = C_x \\ \dot{y} = -gt + C_y \end{cases} \qquad (C_x,\ C_y \text{ は積分定数}) \tag{3.48}$$

さらに積分すると

$$\begin{cases} x = C_x t + C_{x2} \\ y = -\dfrac{g}{2}t^2 + C_y t + C_{y2} \end{cases} \qquad (C_{x2},\ C_{y2} \text{ は積分定数}) \tag{3.49}$$

式 (3.48)(3.49) より時刻 $t = 0$ のときの速度と位置は

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = C_x \\ \dot{y}(0) = C_y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = C_{x2} \\ y(0) = C_{y2} \end{cases} \tag{3.50}$$

で与えられる。一方題意より

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.51}$$

式 (3.50)(3.51) を比べると積分定数は以下のようになることがわかる。

$$\begin{cases} C_x &= v_0 \cos\theta \\ C_y &= v_0 \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{x2} &= 0 \\ C_{y2} &= 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

上式を式 (3.48)(3.49) に代入して

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\theta \\ \dot{y} = -gt + \sin\theta \end{cases} \tag{3.53}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \cdot t \end{cases} \quad \cdots(答) \tag{3.54}$$

式 (3.53) よりボールの水平方向の運動は等速度運動であることがわかる。また，$g=0$ ならば式 (3.53) および (3.54) の第 2 式第 1 項はいずれも 0 になり，重力が働かなければ鉛直方向も等速度運動であることがわかる。言いかえると

鉛直方向の運動 ＝ 初速度で決まる等速度運動 ＋ 重力による落下運動

である (図 3.16)。

(3)
式 (3.54) から時間 t を消去すると

$$y = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}x^2 + v_0\tan\theta\cdot x$$

と，二次曲線 ($y=ax^2+bx+c$ の形) になる。このため二次曲線はしばしば**放物線**とも呼ばれる。

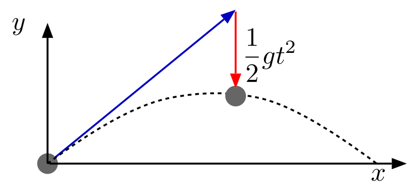


図 3.16　重力が働かなければボールは直線上を等速度運動をするが，重力の影響により時間 t の間に $\frac{1}{2}gt^2$ だけ落ちる。落ちる距離は，初速度の向きやボールの質量とは無関係に時間だけで決まる。

(4) 式 (3.54) の第 2 式で $y=0$ となる時刻 t を求める。

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + v_0\sin\theta\cdot t \tag{3.55}$$

これを解くと

$$t = 0,\ \frac{2v_0}{g}\sin\theta \tag{3.56}$$

この 2 つの解のうち，$t=0$ はボールを投げ出した瞬間の高さが 0 であることを示している。求めたいのは再び高さが 0 になる時刻なので

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\theta \quad \cdots(\text{答}) \tag{3.57}$$

この式から，**ボールの落下時間はボールの質量 m と無関係であり，初速度とその向きだけで決まることがわかる**。また，初速度が速い場合や，月などの重力加速度の大きさ g が小さな場所では落下時間が長くなることもわかる[*]。

[*] 物理計算の答は，このように式から予測される現象と，経験上予測される結果が一致するかどうかを確認することで，計算ミスを防ぐことができる。

(5) 式 (3.57) を式 (3.54) の第 1 式に代入すると，落ちるまでに飛んだ距離が得られる。

$$x = v_0\cos\theta\cdot\frac{2v_0}{g}\sin\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \quad \cdots(\text{答}) \tag{3.58}$$

この式から，**飛距離はボールの質量 m と無関係であり，ボールの初速度とその向きだけで決まることがわかる**。

(6) ボールが飛んだ距離 (式 (3.58)) が最大になるのは $\sin 2\theta$ が最大値をとるとき，すなわち

$$\theta = \pi/4 \quad \cdots(\text{答}) \tag{3.59}$$

のときである。このときのボールの飛距離は次式で与えられる。

$$x = \frac{v_0^2}{g} \quad \cdots(\text{答}) \tag{3.60}$$

(7) 式 (3.60) に $v = 30$ m/s を代入すると

$$x = \frac{(30\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{m/s}^2} \simeq 90\ \mathrm{m} \quad \cdots(\text{答})$$

3.6 力の作用・分解・合力

3.6.1 力の作用

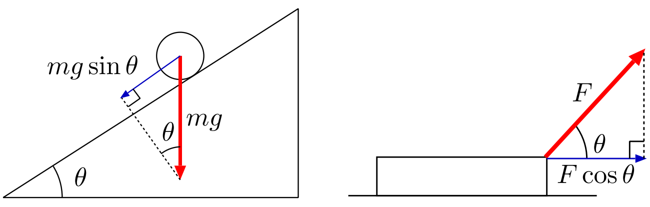
ある斜面に物体があるとき，物体の斜面方向の運動には重力はどの程度寄与するだろうか。ガリレイとほぼ同時代の科学者**シモン・ステヴィン**[*] は，三角形の台の２つのなめらかな斜面に球を数珠つなぎにしたものをかけたとき，各斜面にある球の個数が斜面の長さに比例した個数のときに力がちょうどつりあうことを発見した (図 3.17)。すなわち斜面の角度が水平に近付く程，重力が物体に及ぼす斜面方向の作用は小さくなり，その作用の大きさはちょうど力の斜面方向の成分に等しくなる。言いかえると，**ある力の向きと大きさを矢印の向きと長さで表したとき，その矢印を与えられた方向に投影した長さが，その方向への力の作用の大きさになる** (図 3.18)。

[*] ステヴィン (Simon Stevin，1548-1620，ベルギー) は力学や数学などの基礎科学から都市計画等の大規模な工学まで手がけた１６世紀の最も優れた科学者といわれる人物の一人。物体の落下速度が物体の重さによらないことも，いろいろな大きさの鉛の球を落とす実験によってガリレイより早く発見している。また潮汐が月の影響であること説明を試みる等万有引力の発見に踏み込む研究も行っている。音楽の分野でも，現在の鍵盤楽器の調律法である平均律を発明した等の業績がある (`http://en.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin`)。ステヴィンの業績については以下が詳しい。山本義隆著「磁力と重力の発見」みすず書房。


DE
BEGHINSELEN
DER WEEGHCONST
BESCHREVEN DVER
SIMON STEVIN
van Brugghe.

TOT LEYDEN,
Inde Druckerye van Christoffel Plantijn,
By Françoys van Raphelinghen.
cIↃ. IↃ. LXXXVI.

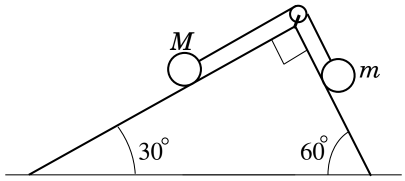
図 3.17 ステヴィンが 1586 年に出版した「つりあいの原理」の表紙。ステヴィンによる力のつりあいの実験が描かれている。ちょうど斜面の長さに比例した個数の球が斜面上にあるとき球は静止する。三角形の下にある球はその左右対称性より斜面上の力のつりあいには影響しない。図は wikipedia より



(a) (b)

図 3.18 ある力が物体の運動方向に及ぼす作用の大きさは，運動方向への力の射影の長さに等しい。(a) 斜面にある物体に働く重力の斜面方向への作用。(b) 水平面にある物体が角度 θ だけ上方にはたらく力 F の水平方向への作用。

[例題 3.8] 図のように断面が直角三角形の台があり，その頂点にある滑車を介してひもでつながった質量 M と m の 2 つのおもりがある。台は地面に固定されており，台とおもりの接触面に摩擦は無い。ひもは十分に軽く，重力加速度の大きさは g とする。



(1) 質量 M と m のおもりがうける重力の斜面方向の成分をそれぞれ図示して，その大きさを求めなさい。

(2) 2 つのおもりが斜面上に静止している場合には，(1) で求めた 2 つの力の大きさが等しいと考えられる。この時 M と m の比がそれぞれの乗っている斜面の長さの比と等しいことを示しなさい。

[解説]

(1) 質量 M および m のおもりに働く重力の斜面方向の成分はそれぞれ図の青線に示す通りであり，その大きさ F_M, F_m は次式で与えられる。

$$\begin{cases} F_M &= Mg\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}Mg \\ F_m &= mg\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}mg \end{cases} \cdots (\text{答})$$

(2) 題意より $F_M = F_m$ のときは，上式より以下が成り立つ。

$$\frac{\sqrt{3}}{2}Mg = \frac{1}{2}mg$$

$$\frac{M}{m} = \sqrt{3} \qquad (3.61)$$

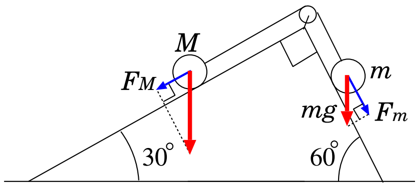


図 3.19 各おもりがうける重力 (赤線) とその斜面方向成分 (青線)

一方で，おもり M と m のある斜面の長さの比は $\sqrt{3}/1$ なので上式で求めた重りの質量比と一致する。以上より，ステヴィンが述べたように 2 つのおもりがちょうどつりあって静止するときの質量比は，各おもりが置いてある斜面の長さの比に等しいことがわかる。

■

[問 3.5] 図 3.18 のように，ある力が物体の運動方向に及ぼす作用の大きさは，運動方向への力の射影の長さに等しいと仮定すると，ステヴィンの実験結果を説明できることを示しなさい。すなわち，図 3.20 のように，斜面 $\overline{AB}$ と $\overline{CA}$ の長さの比に比例した個数の球が各斜面にあるとすると，このとき斜面 $\overline{AB}$ 上の球にはたらく重力の斜面方向の作用の総和が斜面 $\overline{CA}$ 上の球

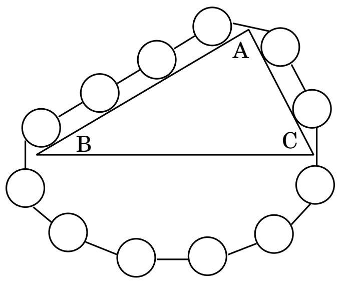


図 3.20 ステヴィンによる力のつりあいの実験。

への重力の作用の総和と等しいことを示しなさい。(この問は，例題例題 3.8 を一般化した場合の証明である)

3.6.2 力の分解・合成と運動方程式

フランスの物理学者ヴァリニヨン[*] は，ちょうどニュートンがプリンキピアを発表した 1687 年に，複数の力がどのような条件の元でつりあうかを示す実験を発表した。その実験によると，

> ２つの力 F_1，F_2 の合力は，各力と同じ向きで大きさに比例した長さの矢印を二辺とする平行四辺形の対角線で表される力と等価

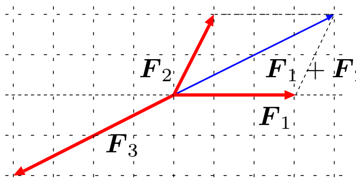


図 3.21　力のつりあい。複数の力の和はベクトル和で与えられる。図示した３つの力について $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$ が成り立つ。

[*]Pierre Varignon, 1654-1722, 仏

になる (図 3.21)。この時，力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の $\boldsymbol{F}_3$ 方向に及ぼす作用の和がちょうど合力の大きさになっており，ここでもステヴィンがヴァリニヨンに 100 年先駆けて発表した力の分解について確認することができる。

以上より**物体に複数の力が働くとき，その作用は各力ベクトルのベクトル和（合力）となると考えれば良い**。よって物体 m の物体が複数の力 $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1,...,N)$ を受ける時の運動方程式は以下のようになる。

$$m\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i \tag{3.62}$$

[問 3.6] 力 $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の合力 $\boldsymbol{F}_3$ の大きさは，$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ が $\boldsymbol{F}_3$ の方向に及ぼす作用の和と等しいことを証明しなさい。

3.6.3 合力の幾何学的意味 *

前節で，２つの力 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ の合力の大きさは，ちょうど $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$ が両者を２辺とする平行四辺形の対角線方向への作用の和（ちょうど対角線の長さ）になる。$\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ の作用の大きさの和を長さとするベクトルはあらゆる方向に作ることができる。そのようなベクトルの例 $\tilde{\boldsymbol{F}}_3$ を図 3.22 に示す。このようなベクトルの中から，自然は合力の向きを２つの力のベクトル和の向きに選んだ (図 3.21)。この合力の向きにはどのような意味があるのだろうか。その幾何学的な意味をもう少し考えてみよう。

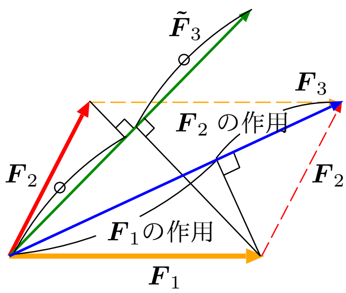


図 3.22　力 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ の合力の向きの意味は？ $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ の作用の大きさの和を長さとするベクトルはあらゆる方向に作ることができる。

力 $\boldsymbol{F}_1$ および $\boldsymbol{F}_2$ の，力 $\boldsymbol{F}_3$ と直交する方向への作用をそれぞれ $\boldsymbol{F}_1^{\perp}$，$\boldsymbol{F}_2^{\perp}$ とおくと図 3.23(a) のようになり，その大きさは互いに等しく逆向きである $(\boldsymbol{F}_1^{\perp}=-\boldsymbol{F}_2^{\perp})$

ことがわかる。つまり，２つの力の合力の向きというのは，その向きに直交する成分が違いに等しくなる向きである。

さらに別の視点で合力の向きを考えることもできる。$\boldsymbol{F}_1$ と角度 ϕ をなす向きへの $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の作用の和を考えてみよう (図 3.23(b))。その作用の和を $\tilde{F}_3$ とおくと

$$\tilde{F}_3 = F_1 \cos\phi + F_2 \cos(\theta - \phi) \tag{3.63}$$

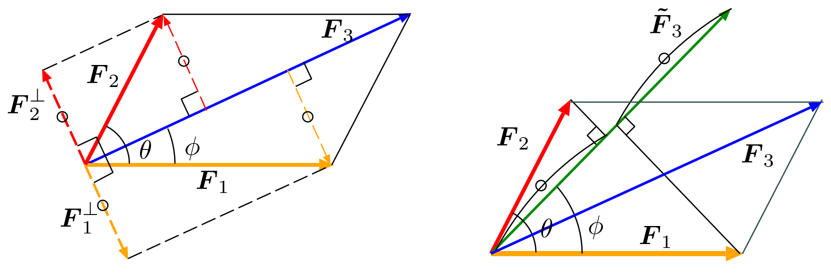
となる。ここで，θ は $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ がなす角であり，$F_1 = |\boldsymbol{F}_1|$, $F_2 = |\boldsymbol{F}_2|$, $\tilde{F}_3 = |\tilde{\boldsymbol{F}}_3|$ である。$\tilde{F}_3$ が最大になるような角度 ϕ を求めてみよう。このような角度は次式を満たす角度である。

$$\frac{d\tilde{F}_3}{d\phi} = -F_1 \sin\phi + F_2 \sin(\theta - \phi) = 0 \tag{3.64}$$

さて，特に ϕ が $\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ の合力 $\boldsymbol{F}_3$ の向きを表す角度であれば前述の通り $|\boldsymbol{F}_1^{\perp}| = |\boldsymbol{F}_2^{\perp}|$ なので，

$$F_1 \sin\phi = F_2 \sin(\theta - \phi) \tag{3.65}$$

である (図 3.23(a))。この式は式 (3.64) をちょうど満たすことがわかる。すなわち２つの力の合力の向きとは，２つの力の作用の和が最大になる向きであることがわかる。



(a)　　(b)

図 3.23　合力の向きの意味。(a) ２つの力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ の，合力と直交する方向への作用 $\boldsymbol{F}_1^{\perp}$ と $\boldsymbol{F}_2^{\perp}$ は逆向きで大きさは等しい。(b) ２つの力 $\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$ の作用の和が最大になる方向が，合力の方向である。

3.7　座標変換と見かけの力 (慣性力)*

地上に固定した一次元座標系を考え，ある物体 A の位置を x で表す。この座標系は慣性系とみなすことができるとする。この一次元の座標軸に沿って走る電車の位置を $s(t)$，電車から見た物体の位置を $\tilde{x}$ とすると次式が成立する。

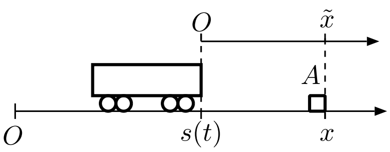


図 3.24　地上に固定した座標系 $x(t)$ と電車に固定した座標系 $\tilde{x}(t)$

$$x = \tilde{x} + s(t) \tag{3.66}$$

電車が等速度で走っているならば定数 a, b を用いて

$$s(t) = at + b \tag{3.67}$$

とかけるので，これを式 (3.66) に代入すると次式が得られる。

$$x = \tilde{x} + at + b \tag{3.68}$$

このように，互いに等速度運動を行う座標系を結び付ける座標変換を**ガリレイ変換** (galilean transformation) という。

[例題 3.9] 物体 A を地上からみた位置を x，等速度で走る電車から見た位置を $\tilde{x}$ とおく。物体 A に力 F が働くとき，地上からみた物体 A の運動は以下の運動方程式で表される。

$$m\ddot{x} = F \tag{3.69}$$

電車から見た物体の位置 $\tilde{x}$ に対しても，同様に次式で表されることを示しなさい。

$$m\ddot{\tilde{x}} = F \tag{3.70}$$

[解説] x と $\tilde{x}$ の間には関係式 (3.68) が成り立つ。この両辺を時間で 2 回微分すると次式を得る。

$$\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}}'$$

式 (3.69) に代入すると、

$$m\ddot{\tilde{x}} = F$$

式 (3.70) を得る。

■

前問の結果から，運動方程式は，互いに等速度運動を行う座標系を選ぶ限りどの座標系においても同じ形で書くことができる，つまり，**ガリレイ変換**によって関係付けられる 2 つの座標系において，物体の運動はまったく同じ物理法則に従うことがわかる。もちろん，座標系間の速度が 0 の時 (式 (3.68) で $a = 0$ のとき)，すなわち原点が異なるだけの場合についても同様である。これがいわゆる**物理法則における対称性**の一つであり，**ガリレイの相対性原理**もしくは**ガリレイ不変性** (galilean invariance) という。

ニュートンの運動方程式は多くの実験の結果より経験的に導かれたものであった。言い替えると，経験上これに反する物理現象は無いとされ，物理世界の真理を表す式として確立されたものである。身の回りの力学的現象の全てを，このように単純な式で説明できるということは大変な発見である。

しかし，本節で示したような座標変換によるニュートン力学の不変性は後に否定され，アインシュタインの相対性理論によって書き直されることになった。座標変

換は時間を含む形に修正され，さらに質量は速度の関数になるなど，ニュートンによる古典力学は大きく修正された。

ガリレイやニュートンは，「定量的な表現と論述」を可能とする「数学」という言語を開拓し，多くの実験結果をこの新しい言語でまとめあげていった。これにより，それまでの時代の「定性的表現」による方法よりも深い洞察を可能とし，自然法則を浮き彫りにしていった。しかし，彼らの手法はあくまで実験結果をもとに背後の真理を洞察する方法であった。

一方，アインシュタインはまったくの想像の世界からわいたようにも思える仮定 (光の速度はどんな座標系で測っても同じとする光速度不変の原理) を出発点とし，さらにその仮定に基づく**思考実験**という一見現実世界とどう結び付くかわからないようなプロセスによって，「動いてる棒は縮む」やら「動いてると時間がのびる」やらといった，これまた当時の実験では検証不可能な物語を作ることによって，力学に関する従来の常識を打ち破った。そこには日常観察される力学現象と理論の間に非常に大きな隔たりができている。

にも関わらず相対論が受け入れられていったということはおそるべき話である。一つ間違えば「宇宙の真理は光です」とかなんとか口走るチマタの教祖様と変わらない。それがトンデモ系で終らなかったということは，その新しい考えに魅力があったのみならず，アインシュタインが自分のアイデアの妥当性を説明するための手法と表現力が非常に優れていたということだろう。

なにはともあれ，我々が日常経験する物理現象については，ニュートンの運動方程式でその本質を十分表現することができる。

[**例題 3.10**] 電車が加速度 a で等加速度運動を行ってる場合，例えば次式が成立する場合を考えよう。

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 \tag{3.71}$$

この場合，電車から見た座標系での物体の運動方程式は，

$$m\ddot{\bar{x}} = F - ma \tag{3.72}$$

となることを示しなさい。

[解説] 式 (3.66) に式 (3.71) を代入して，両辺を二階微分すると，

$$\ddot{x} = \ddot{\bar{x}} + a \tag{3.73}$$

これを物体を地上から見たときの運動方程式 (3.69) に代入すると，

$$m(\ddot{\bar{x}} + a) = F$$

よって，次式を得る。

$$m\ddot{\bar{x}} = F - ma \tag{3.74}$$

■

加速する電車にのって物体の運動を観察すると，物体にはあたかも水平方向になんらかの力が加わったように見える。その謎の**力の向きは電車の加速度と逆で，大きさは物体の質量と電車の加速度の積**であることが前問の結果よりわかる (電車が動き出す時に，後向きの力を感じることを思い出そう!)。このような力を**慣性力**もしくは**みかけの力**と呼ぶ。

章でも少しふれたが，エレベータのように閉じた空間内にいた時，その空間の物体に働く力が例えば重力によるものなのか，このようなみかけの力なのかを区別することは必ずしも可能ではない。

[問 **3.7**] 自由落下する飛行機の中では，あたかも無重力状態であるかのように感じられる。その理由を数学的に説明しなさい。ここで，自由落下とは，物体が重力のみに影響を受けて行う運動とする。したがって**自由落下には，ある初速度で打ち出された物体が上に飛んで行く状態**も含まれることに注意せよ。

3.8 運動の第三法則 (作用・反作用の法則)

「プリンキピア」による力学の**第三法則** (Newton's Third law of motion : Law of reciprocal actions)) によると

> **すべての作用に対して，等しく，かつ反対向きの反作用が常に存在する。すなわち，互いに働きあう二つの物体の相互の作用は常にあい等しく，かつ反対方向へと向かう** [16]。

3.5 節で述べたように，ニュートンは万有引力を「2 つの物体間にはたらき，大きさが互いに等しく，その向きは違いに逆向き（引き合う方向）である力」と考えた。この万有引力の性質を全ての力について拡張して述べたものがこの**運動の第三法則**であり，しばしば**作用・反作用の法則** (Law of reciprocal actions) と呼ばれる。この法則によると，**力とは単独にある物体だけに作用することはない**。ある物体が力を受けているとき，必ずその物体と逆方向に同じ大きさの力を受けている物体が存在する。言い替えると，**力は必ず一対ずつ存在する**。従って，もしある閉じた空間[*]S 内の物体に働く力 $\boldsymbol{F}_i$ を全て列挙したら，そのベクトル和は $\mathbf{0}$ になる。すなわち，

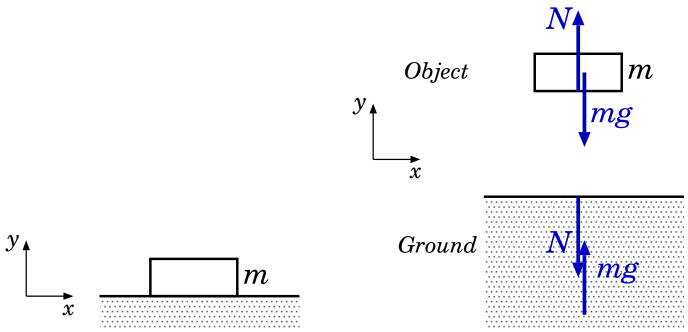
$$\sum_{i \in S} \boldsymbol{F}_i = \mathbf{0}$$

よって，閉じた空間内にある物体の運動は上式により互いに拘束される。同様に，我々のいる宇宙空間に働く全ての力を列挙したら，その総和は常に零ベクトルになる[†]。これにより，力を及ぼしあう複数の物体の運動も簡単に記述することができる。これについては 6 章で詳しく取り扱う。

力学の問題を考える際の基本は，対象に働く力を列挙し，そして運動方程式をたてることである。対象の物体が複数あり，互いに力を及ぼしあっているときには，その力を及ぼしあう点において運動の第三法則が成り立つことを必ず思い出すようにすること。

[*] ここで**閉じた空間**とは，その空間に対する外力ははたらいていない空間，すなわち外力から隔離された空間という意味に用いている。

[†] もちろん宇宙空間を，外力から隔離された閉じた空間とみなせるならばの話。



(a) (b)

図 3.25 (a) 物体間に働く力を図示しよう。図示するときには (b) のように各物体を分離して，働く力を一対ずつ書くこと。このような図を Free-Body Diagrams という。

3.9 Free-Body Diagrams と運動方程式

物体の運動を解析する際には，まず，注目している各物体のどこにどのような力がはたらいているかを図示する。この図を **Free-Body Diagrams**[‡] という。Free-Body Diagrams を作るには以下の点に注意する。

(1) **各物体が物理的に接している場合にも，図では切り離して書く。**切り離して書くことによって，書き込んだ力ベクトルがどの物体のどこに作用しているかが明確になる。

(2) 地球上の物体なら重力による力ベクトルを書く。物体同士が接しているならば，力を及ぼしあっていると考えて対応する力ベクトルを書く。

(3) 力は矢印（ベクトル）で表し，**力が作用する点を起点**として書く[*]。重力による力の起点は重心位置[†] にとる。ただし、矢印が重なって見にくくなる場合には若干ずらして書いて良い。

(4) 力を示す矢印の横には，**その力の種類と大きさを示す記号**を書く[‡]。

(5) **力ベクトルは単独で存在することはない。**ある物体に働く力を書いたら，その反作用により力を受ける物体が必ず存在する。よって**力ベクトルは 1 対づつ書く。**対応する力ベクトルの矢印の向きは互いに逆だが，長さは同じに書くこと。

Free-Body Diagrams をつくったら以下の手順で運動方程式を書く。

(1) 座標軸を定義する (各軸の正の方向を決めること)。

(2) 各座標軸の方向について各物体の運動方程式を書く。このとき，軸の向きと力の向きの関係をよく気をつけること。軸の向きと同じ方向に矢印を書いた力には +，逆の方向の力には - の符号をつければよい。

[‡]「**自由体図**」と訳する場合もある

[*] 矢印の終点が作用点に来るように書いているテキストや，あらゆる力の起点を物体の中心に書いているテキストもあるが，特別な理由がない限りはお薦めしない。矢印の起点の意味が失われ，特に後の章で述べるような剛体の回転を扱うとき、作用点がわからないと回転運動を記述するのが困難になるからである。

[†] 物体の中心。詳細は 6 章参照

[‡] 後でも述べるが，力を示す記号として，垂直抗力や床反力なら N，重力ならば単に mg と表記されることが多い。

[例題 3.11] 摩擦の無い床の上に質量 m の物体があり，静止している（図 3.25(a)）。以下の問いに答えなさい。重力加速度の大きさは g とする。

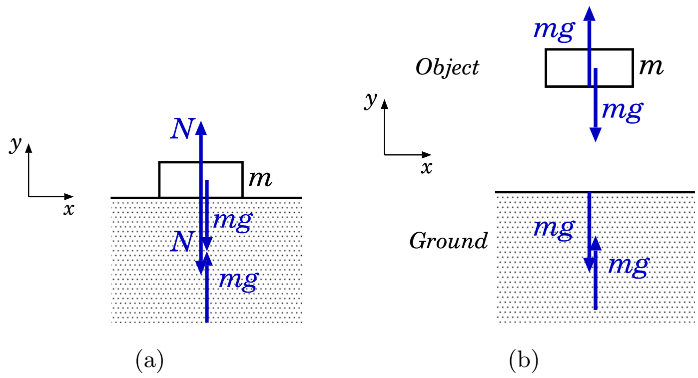


図 3.26 力の記述の悪い例 (a)Free-Body Diagrams にしない悪い例。例えば 2 つの力 N のどちらが物体に働き，どちらが床面に働いているのかが図を見てもわからない。(b) 力の説明が悪い例。物体間に働く力を書くとき，運動方程式を解いた結果はじめてわかる力の大きさを書いてはいけない。どの力がどういう種類のものかも，ある作用に対する反作用がどれかもわからない図になる。

(1) 物体と床（地球）について Free-Body Diagrams を書きなさい。
(2) 物体の運動方程式を書きなさい。
(3) 床が物体を押す力を求めなさい。

[解説]

(1) 図 3.25(b) が物体と床（地球）の受ける力を Free-Body Diagrams に図示したものである。

物体の受ける力には，**万有引力による重力と床から受ける力**がある。前者は地球の中心に向かう大きさ mg の力である。物体に働く力が重力のみならば物体は下に落ちるが，床から受ける力によって物体は床上にとどまっている。このような物体間に働く力について以下のような性質が知られている。

> **物体が他の物体との接触により受ける力は，摩擦[*] が無い限り接触面に垂直にのみ働く。**

この物体間に働く力を**垂直抗力** (normal force) [†] とよび，一般に記号 N で表す。また，物体が床からうける垂直抗力をしばしば**床反力** (ground reaction force) という。

力は必ず作用と反作用の一対が存在するので，これも図示しておこう。物体の受ける重力の反作用は，地球が物体から受ける力である（図では地球の中心からという意味で，少し下に図示してみた）。物体がうける床反力の反作用は，床面が物体から受けている。

物体や床にはたらく力を Free-Body Diagrams にしないで書き込むと図 3.26(a) のようになる。どの力がどの物体に対する力かが図から自明でなくなってしまう。

(2) 物体の運動方程式を書くには，まず座標軸を定義する。ここでは，図 3.25(a) のように水平方向と鉛直方向にそれぞれ x, y 軸をとってみる。あとは，各座標軸

[*] 摩擦とは接触しながら運動する物体間の接触面に水平に働く力である (4.3 節参照)

[†] normal には垂直という意味がある。この normal force の N がしばしば床反力を表す記号として用いられる。

[‡] ベクトル方程式で書くならば

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{N} + m\boldsymbol{g}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x, y)$，$\boldsymbol{N} = (N, 0)$，$\boldsymbol{g} = (0, -g)$ である。

方向毎に運動方程式を書く。この時座標軸と同じ向きの力の作用成分には $+$ を，逆向きの成分には $-$ をつけて機械的に運動方程式を書いていく[‡] 。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= N - mg \end{cases} \tag{3.75}$$

物体が静止している場合には $\ddot{y} = 0$ なので，上式より

$$m \cdot 0 = N - mg$$

ゆえに，

$$N = mg$$

が得られる。ここで，$N = mg > 0$ であることから物体が床から受ける力 (床反力) は鉛直上向きであり，その大きさは mg であることがわかる。この結果は一見自明のようであるが，運動方程式より計算をした結果はじめてわかることである。よって，運動方程式を導くための Free-Body Diagrams に，はじめから床反力を mg と書いてはいけない。このような悪い例を図 3.26(b) に示す。どの力がどういう種類のものかがわからななり，ある作用に対する反作用がどれかもわからなくなる。そのため，致命的なミスを犯すことも多くなる。■

第 4 章

いろいろな力と運動

4.1　糸でつながった物体の運動

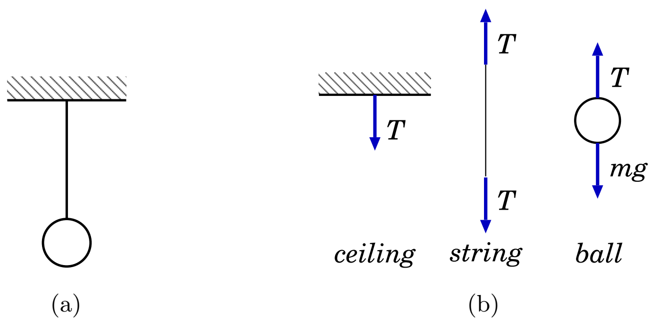


図 4.1　(a) 糸は張力により 2 つの物体の距離を一定に保つ。(b) 天井と糸とおもりの Free-Body Diagrams. 本当は天井が落ちてこないように支える力も存在するが，この力は省略している。

糸の一端に物体を結んでもう一端を引っ張ると，物体を動かすことができる。このとき糸は物体を糸の内側方向へ引っ張る力，すなわち**張力** (tension, tensile strength) [*] を与えている。伸縮しない糸[†] の両端に物体を結びつけると，糸がたるんでいない限りその張力によって物体間の距離（より正確には糸に沿った距離）を一定に保つことができる (図 4.1(a))。このとき，糸の質量が無視でき，糸の途中に摩擦などの糸の運動を妨げる力が働かなければ，両端の物体に働く張力の大きさは同じである。さらに糸は微小片がつながったものと考えたら，糸が張っている状態でその微小片が動かないことから**張力は糸のあらゆる点で一定**であることもわかる。また，**糸の張力は斥力 (物体を押す方向の力) として働くことはない** (図 4.3)。

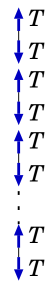


図 4.2　糸を微小断片に分けた時，それぞれに働く張力。糸の張力はいたるところで等しい

図 4.3　糸が両端の物体に斥力を与えることは無い

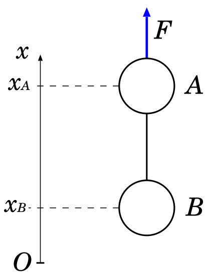
糸でつながれた物体に働く力を記述するときには，糸は単に力を伝える媒体と捉

[*] 張力を表す記号としては tension の頭文字 T がよく使われる。

[†] もちろん実際の糸は多少であれ伸縮する。可逆的に伸縮するものをばねという。ばねについては 4.2 節で述べる。本節では伸縮の度合が無視できる程度の糸を「伸縮しない糸」として議論する。

え，糸に関する Free-Body Diagrams は書かないことが多い。この場合，図 4.1(b) のボールを上向きに引っ張る力の反作用は天井に働くと捉える。

[例題 4.1] 図のように 2 つの丸い球 A, B を糸でつないで鉛直方向に吊るしている。球 A を上向きに力 F で引っ張った。球 A, B の質量をそれぞれ m_A, m_B，球 A, B 間の糸の張力を T，重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。糸の質量は無視できるとする。



(1) 球 A と B に働く力を Free-Body Diagrams に示しなさい。

(2) 鉛直上向きに x 軸をとり，球 A, B の位置をそれぞれ x_A, x_B で表す。球 A, B の x 軸方向の運動方程式を書きなさい。

(3) 糸がたるまなければ球 A, B の加速度は等しい。この加速度 a とした場合に，糸の張力 T を求めなさい。

[解説] (1) 球 A と B の Free-Body Diagrams を図 4.4 に示す。

(2) 図 4.4 を見ながら球 A, B の運動方程式を書くと以下のようになる。

$$\begin{cases} m_A\ddot{x}_A &= F - m_A g - T \\ m_B\ddot{x}_B &= T - m_B g \end{cases} \cdots (\text{答}) \qquad (4.1)$$

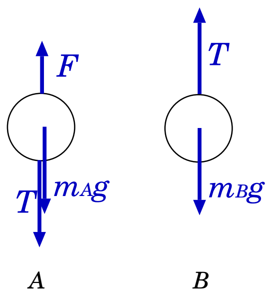


図 4.4 球 A，B の Free-Body Diagrams

(3) 式 (4.1) において $\ddot{x}_A = \ddot{x}_B = a$ とおくと

$$\begin{cases} m_A a &= F - m_A g - T \\ m_B a &= T - m_B g \end{cases}$$

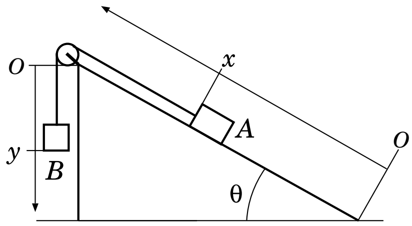
この連立方程式を解くと以下を得る。

$$\begin{cases} a &= \dfrac{F}{m_A + m_B} - g \\ T &= \dfrac{m_B}{m_A + m_B} F \end{cases} \cdots (\text{答})$$

ここで，物理現象の想像をしてみよう。$m_B = 0$ の場合，すなわち物体 B が実は存在しない場合には張力 T は 0 になるはずである。また，もし $F = 0$ ならば，A, B は単なる自由落下をおこなうので，両者の加速度は重力加速度と等しくなり，糸の張力は 0 になるはずである。さらに，$m_A = 0$ ならば，物体 B には重力と力 F の差に応じた加速度が生じるはずである。上式がこれらの想像と矛盾するものでないか各自確認すること。

■

[例題 4.2] 図のように傾斜角 θ のなめらかな斜面に物体 A がある。物体 A に糸がついており，斜面の頂点にある滑車を介して物体 B につながっている。物体 A, B の質量はそれぞれ m_A, m_B，重力加速度の大きさを g とする。糸はたるんでおらず、また、その質量は無視できるとして以下の問に答えなさい。



(1) 物体 A, B, 斜面 (地球を含む) に働く力をそれぞれ Free-Body Diagrams に書きなさい。各力を表す記号は必要に応じて定義しなさい。
(2) 図のように物体 A の位置を斜面にそった座標軸 x で，物体 B の位置を鉛直方向の座標軸 y で表す。物体 A, B の運動方程式をそれぞれ書きなさい。
(3) 糸がたるまなければ $\ddot{x} = \ddot{y}$ である。$\ddot{x}$ および糸の張力を求めなさい。
(4) どのような条件が満たされた時に、物体 A, B は等速度運動を行なうかを述べなさい。

[解説] (1) 糸の張力を T, 物体 A が斜面から受ける垂直抗力を N とおくと Free-Body Diagrams は以下の通り。ここで，物体 A にはたらく重力については，後の設問のために斜面方向および斜面に垂直な方向への作用成分も細い線で書いている。このようにある方向への力の作用を書くときには，作用成分であることがわかる書き方をすること。

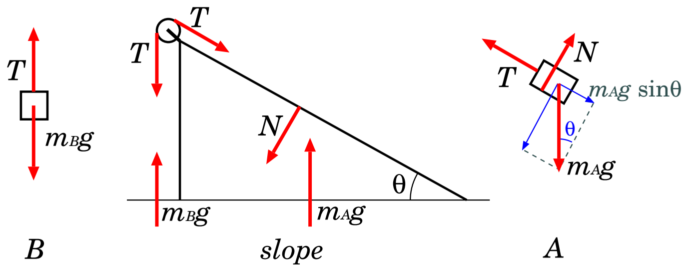


図 4.5 物体 A, B，糸，斜面 (地球を含む) の Free-Body Diagrams

(2) 座標軸の向きに注意し，Free-Body Diagrams を見ながら物体 A, B の運動方程式を書くと以下の通りになる。

$$\begin{cases} m_A\ddot{x} &= T - m_A g\sin\theta \\ m_B\ddot{y} &= m_B g - T \end{cases} \tag{4.2}$$

斜面が実は水平面 ($\theta = 0$) だった場合，A の運動は重力の影響を受けないはずである。実際に上式に $\theta = 0$ を代入すると A の運動への重力の影響はなくなることから，予想できる物理現象を表す式になっていることがわかる。

(３) (4.2) 式において $\ddot{x} = \ddot{y}$ とおいて連立方程式として解くと次式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \dfrac{m_B - m_A \sin\theta}{m_A + m_B} g \\ T &= \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}(1 + \sin\theta) g \end{cases} \tag{4.3}$$

ここで，再び物理現象の予想をしよう。$m_A = 0$ ならば m_B は自由落下 (加速度の大きさ g) をして張力は 0 になるはずである。また，$m_B = 0$ なら m_A は斜面方向に落下 (加速度の大きさ $g \sin\theta$) をして張力は 0 になるはずである。これらの予想どおりの計算結果が出ているかは各自確認してほしい。

(４) 物体 A, B が等速度運動を行なう時、両者の加速度は 0 になる。そこで、式 (4.3) の第 1 式に $\ddot{x} = 0$ を代入して、これが成り立つ条件を調べよう。

$$0 = \frac{m_B - m_A \sin\theta}{m_A + m_B} g$$
$$\therefore m_B g = m_A g \sin\theta$$

つまり、物体 A に働く重力の斜面方向の成分の大きさが、物体 B に働く重力の大きさと等しい時に、これらの物体は等速度運動を行なうことがわかる。例えば，$\theta = 90°$、つまり斜面が鉛直面ならば，$m_A = m_B$ の場合に等速運動になる。$\theta = 0°$、つまり斜面が水平面ならば、$m_B = 0$ のときのみ等速度運動になる。

■

4.2 ばねによる運動

イギリスのロバート・フック[*] は，ばねの復元力のは自然長からの伸びに比例することを発見した。すなわち，ばねの自然長からの伸びを x，比例定数を k とすれば，復元力の大きさは kx となる。これをフックの法則とよび，比例定数 k をばね定数と呼ぶ[†]。硬いばね，すなわち小さな伸びで大きな力を出すばねは，ばね定数が大きいばねということになる。また，ばね定数が無限大の極限を考えたものが伸縮しない糸（ひも）と考えることができる。

[*] フック (Robert Fooke, 1635-1703, 英) は物理学者，生物学者であり，気体の法則で有名なシャルル・ボイルの助手をしていたこともある。建築家としても有名だった。(http://ja.wikipedia.org/wiki/ 参照)

[†] フックの法則はばねの伸びがある程度小さいときに成立する。

[例題 4.3] 図 4.6 のように，壁に一端を固定したばね (ばね定数 k) に質量 m のおもりをとりつけ，滑らかな水平面上においた。原点 O をばねの自然長の位置として，ばねの伸び（おもりの位置）を x で表す。重力加速度の大きさを g とし，ばねの質量は無視できるとして以下の問いに答えなさい。

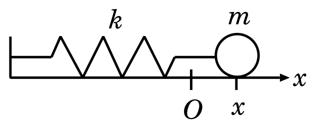


図 4.6

(1) ばねがおもりを押す力を F, おもりが床から押される力 (床反力) を N とおく。壁と床，ばね，おもりについてそれぞれについて，各物体が受けている力を Free-Body Diagrams に示しなさい。

(2) おもりの水平方向の運動方程式を書きなさい。また，書いた運動方程式が $x < 0$ の時と $x > 0$ の時のいずれの場合も表していることを確認しなさい。

(3) 運動方程式を解き，おもりの運動の周期および振幅を求めなさい。ただし，$x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ であったとする。

[解説]

(1) 物体がうける垂直抗力を N とすると，バネが伸びている時に壁と床，ばね，おもりに働く力を Free-Body Diagrams に表すと図 4.7 にようになる。バネが縮んでいる時，つまり $x < 0$ のときには，各図にある kx の符号が負になるので，力の向きは図中の矢印の向きと逆と判断でき，その向きは，バネが縮んでいる場合に働く力の向きをきちんと表している。つまり，図 4.7 は，バネの伸び縮みによらず力の向きを正しく表していることになる。このように，力の大きさに kx などと座標変数が入る時には，その値が正の時をまず考え，その後 x が負の場合でも成り立つことを確認すると間違えにくい。

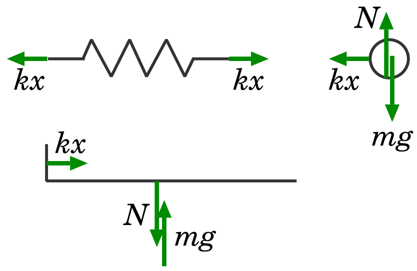


図 4.7 ばね，おもり，壁と床に働く力

(2) おもりの運動方程式は次式の通りである。

$$m\ddot{x} = -kx \quad \cdots(\text{答}) \tag{4.4}$$

この式より，ばねが伸びている $(x > 0)$ とき加速度は負の方向，すなわちばねは縮もうとする力 $(-kx < 0)$ をばねは出し，ばねが縮んでいる $(x < 0)$ ときには伸びようとする力 $(-kx > 0)$ を出すことがわかる。

(3) おもりは周期運動をすると考えられるので，式 (4.4) の解を以下のように仮定してみよう。

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{4.5}$$

ここで，$A(>0)$ は振幅を，ω は**角速度**[*] を表す量であり，ϕ は $t = 0$ などの特定の時刻におけるおもりの位置により決定できる定数である。この式を運動方程式 (4.4) に代入し，各定数がどのような値なら解となるかを調べてみよう。

[*] 角速度は位相の単位時間あたりの変化量であり，SI 単位系での単位は [rad/s] である。

準備として式 (4.5) を微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= \frac{d}{dt}A\cos(\omega t + \phi) \\
&= -\omega A\sin(\omega t + \phi) \\
\frac{d^2}{dt^2}x &= \frac{d}{dt}(-\omega A\sin(\omega t + \phi)) \\
&= -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \\
&= -\omega^2 x
\end{aligned} \tag{4.6}$$

上式を運動方程式 (4.4) の左辺に代入すると

$$-\omega^2 mx = -kx$$
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

すなわち ω が上式の値の時, 式 (4.5) は運動方程式の解となる。このとき

$$x(t) = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) \tag{4.7}$$

上式より $t = 0$ の時の位置と速度は

$$x(0) = A\cos\phi$$
$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin\phi$$

となるが, 題意より $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ なので,

$$a = A\cos\phi \tag{4.8}$$
$$0 = -A\omega\sin\phi \tag{4.9}$$

式 (4.8) より $A \neq 0$, $\cos\phi > 0$ であることがわかる。よって式 (4.9) より $\sin\phi = 0$, すなわち $\phi = 0$ が得られる ($\sin\phi = 0$ を満たすもう一つの解 $\phi = \pi$ は $\cos\phi > 0$ を満たさない)。さらに，この結果を式 (4.8) に代入すると $A = a$ が得られる。以上よりおもりの位置 x は次式の通り。

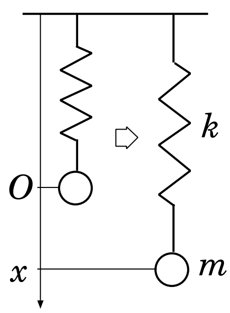
$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{4.10}$$

この式は，おもりが振幅 a，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [*] の振動をすることを示す。

得られたおもりの運動周期の式をみると，ばねが軟らかい程 (k が小さい程)，また，おもりの質量 m が大きい程，周期は小さくなることがわかる。身の回りのばねの運動を想像して，得られた結果がもっともらしいかよく確認すること。

[*]T と ω の関係がわからなくなったら，周期 T の単位が [s]，角速度 ω の単位が [rad/s] であることを思い出せば，単位計算により $T = 2\pi/\omega$ を導くことができる。

[例題 4.4] 図のように質量を無視できるばね定数 k のばねを静かに天井からつるした。鉛直下向きに x 軸をとり，ばねが自然長のときのばねの先端の位置を原点とする。このばねに質量 m のおもりをとりつけ，ばねのつりあいの位置 (おもりが静止する位置) で静かに手をはなした



(1) おもりに働く力を図示しなさい。
(2) おもりの運動方程式を書きなさい。
(3) 運動方程式より，つりあいの位置を求めなさい。
(4) おもりをつりあいの位置から距離 A だけ下に引っ張り，$t = 0$ に静かに手を離した。時刻 t におけるおもりの位置を求めなさい。

[解説]

(1) おもりにはたらく力は図 4.8 の通り。
(2) おもりの運動方程式は次式の通りである。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + mg \\ &= -k(x - \frac{mg}{k}) \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

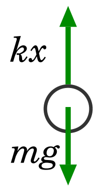


図 4.8 おもりに働く力

(3) つりあいの位置とは，おもりに働く力の合力は 0 になる位置である。すなわち運動方程式 (4.11) の右辺が 0 になる位置である[*]。この位置を x_0 とおくと

$$\begin{aligned} -k(x_0 - \frac{mg}{k}) &= 0 \\ x_0 &= \frac{mg}{k} \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

[*] 当然つりあいの位置での物体の加速度が 0 になる。

(4) おもりはつりあいの位置を中心として振幅 A の周期運動をすると考えられる。$t=0$ において $x = A + x_0$ であることも考慮して式 (4.4) の解を以下のように仮定してみよう。

$$x(t) = A\cos\omega t + x_0 \tag{4.12}$$

ここで, ω は角速度を表す。上式を時間で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega A \sin\omega t \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A\cos\omega t \\ &= -\omega^2(x - x_0) \end{aligned}$$

上式と運動方程式 (4.11) を比べると次式が成り立つことがわかる。

$$\begin{aligned} \omega^2 m &= k \\ \therefore \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

すなわち ω が上式の値の時, 式 (4.12) は運動方程式の解となる。このとき

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_0 \\ &= A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{mg}{k} \quad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

上式が，題意で与えられた $t=0$ の時の位置と速度の条件を満たしていることは各自確認せよ。

前の例題と本例題より，ばねを横にしても縦にしても角速度はばね定数とおもりの質量のみで決まる同じ値になることがわかる。

4.3 摩擦の法則

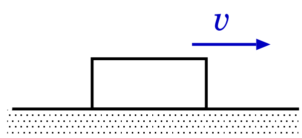


図 4.9 床面を物体が動く時，床面と物体の間には摩擦が働く

床に置いてある物体を滑らすには力が必要である。これは接触している 2 つの物体間においては**接触面と平行にはたらく力**が働くからである (図 4.9)。このような力を**摩擦力** (frictional force)，もしくは単に**摩擦**という。

ニュートンが力の定量的概念が確立する 200 年ほど前に**レオナルド・ダ・ヴィンチ**[*] は板の上の物体を引っ張る実験を行い，**摩擦力**について以下のような発見をした[†]。

(1) 摩擦力は接触面積によらない。

(2) 摩擦力は垂直荷重 (垂直抗力) に比例する。

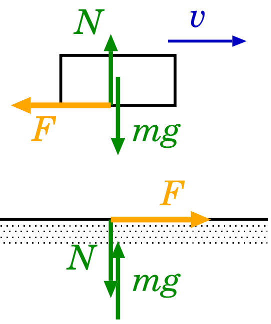


図 4.10 摩擦を及ぼしあう物体と床面の Free-Body Diagrams。ここで物体は右方向に進んでいるとし，F は摩擦力，N は垂直抗力を表す。静止摩擦力の最大値および動摩擦力の大きさは床反力に比例する。

さらに，ダ・ヴィンチより約 200 年後には**ギョーム・アモントン**[‡] が，さらにその約 100 年後には**シャルル・ド・クーロン**[§] はそれぞれ摩擦力の性質に関する再発見を繰り返した。それらの結果は以下のようにまとめられ，現在は**クーロンの摩擦の法則**もしくは**アモントン・クーロンの摩擦の法則**と呼ばれている (図 4.10) [¶]。

(1) 摩擦力には，物体が動き出すのを止める方向に働く**静止摩擦力** (static friction) と，動き出した後に働く**動摩擦力** (kinetic friction) がある。

(2) **静止摩擦力**の性質は以下の通り。

(a) **静止摩擦力**とは，接触している 2 つの物体が**相対的に静止している場合に接触面に平行に働き，相対運動をさまたげる力**である。

(b) **静止摩擦力の最大値**は接触面に働く**垂直抗力に比例する**。その比例定数 (**静止摩擦係数**) を μ_0，垂直抗力を N とすれば，**静止摩擦力の最大値は** $\mu_0 N$ である。

(3) **動摩擦力**の性質は以下の通り。

(a) **動摩擦力**とは，接触している 2 つの物体が**相対的に動いているときに接触面に平行に働き，相対運動をさまたげる力**である。

(b) **動摩擦力**は相対運動の**速度によらず一定**であり，その大きさは接触面に働く**垂直抗力に比例する**。その比例定数 (**動摩擦係数**) を μ，垂直抗力を N とすれば，**動摩擦力は** μN である。

(c) **動摩擦力** (μN) は**静止摩擦力**の最大値 ($\mu_0 N$) よりも小さい。

摩擦定数は，摩擦力と垂直抗力の比を表すものなので無単位の量である。Free-Body Diagrams や運動方程式を書くときには，**摩擦力の向きが運動の向きに依存して決まること**によく注意すること。

摩擦とは物体表面の微小な凸凹によるものだと説明されることが多いが，実はその力の源が何かはまだよくわかっていない。少なくとも相対運動の速さが小さいときには，上記の摩擦と垂直抗力の関係は多くの場合によい近似であることが多くの

[*] ダ・ヴィンチ (Leonardo da Vinci, 1452-1543, 伊) は様々な機械を製作する上で，いかに摩擦を減らすかを考えた。その過程で摩擦の性質の研究も行った。ただ，その研究結果は自分の研究ノートにとどめただけで終わったため，世に知られるのはずっと後世のことになった。

[†] Wikipedia(ja) の「摩擦力」の項，および “History of science: Friction”, http://www.tribology-abc.com/abc/history.htm 参照

[‡]Guillaume Amontons, 1663-1705, 仏

[§] クーロン (Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806, 仏) は電荷間に働く力を「クーロンの法則」としてまとめたことでも有名。

[¶]Wikipedia(ja) の「摩擦力」の項参照

実験により確認されている。

[例題 4.5] 水平な床の上に質量 m の荷物がおいてある (図 4.11)。床と荷物の間の静止摩擦係数を μ_0, 動摩擦係数を μ とし，重力加速度の大きさを g とする。

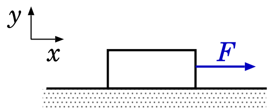


図 4.11

(1) 荷物を力 F で水平方向に引いてみたが，荷物は動かなかった。このとき床と荷物の間に働く摩擦力の大きさを F_f，荷物が床から受ける床反力の大きさを N とする。
  (a) 床と荷物に働く力を Free-Body Diagrams に示しなさい。
  (b) 荷物の運動方程式を書きなさい。座標軸は図のように水平方向右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとりなさい。
  (c) 摩擦力 F_f と加えた力 F の関係を述べなさい。

(2) 荷物を押す力を少しづつ大きくしていくと，力の大きさが F_1 をこえたところで荷物は動き出した。この力の大きさ F_1 を求めなさい。

(3) 荷物が動き出した後に，荷物に働く摩擦力の大きさ F_f を求めなさい。

[解説]

(1)(a) 荷物と床に働く Free-Body Diagrams は図 4.12 の通り。

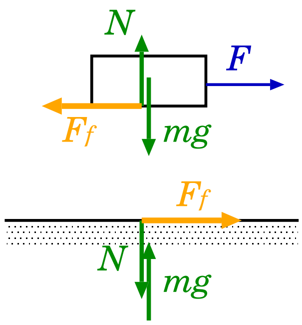


図 4.12 荷物と床の Free-Body Diagrams。

(1)(b) 荷物の運動方程式は次式の通り。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F - F_f \\ m\ddot{y} &= N - mg \end{cases} \tag{4.13}$$

(1)(c) 荷物が動かないとき，$\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ なので，運動方程式を次のように変形できる。

$$\begin{cases} 0 &= F - F_f \\ 0 &= N - mg \end{cases} \tag{4.14}$$

よって次式を得る。

$$\begin{cases} F_f &= F \\ N &= mg \end{cases} \tag{4.15}$$

この第一式 $(F_f = F)$ が求める答である。この式からわかるように，物体が静止しているときに働く静止摩擦力の大きさは物体に加わる力に応じて変化する。

(2) 前問で述べたように静止摩擦力の大きさは，物体に加わる力に応じて変化するが，その大きさには限界があり，最大で $\mu_0 N$ の力までしか出せない。すなわち

$$F_f \leq \mu_0 N \tag{4.16}$$

上式に式 (4.15) を代入すると

$$F \leq \mu_0 mg \tag{4.17}$$

力の大きさ F がこの条件を満たすならば荷物は動かない。逆に上式が成り立たなくなったとき，すなわち

$$F > \mu_0 mg \tag{4.18}$$

ならば荷物は動き出す。よって求める力の大きさは $F_1 = \mu_0 mg$ である。

(3) 荷物が動いているときに，床と荷物の間に働く動摩擦力 F_f は常に一定値 μN である。ここで式 (4.15) の第 2 式を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned} F_f &= \mu N \\ &= \mu mg \quad \cdots \quad (\text{答}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

[例題 4.6] 傾斜角 θ のすべり台に質量 m の子供がじっと座っている (図 4.13)。すべり台と子供の間の静止摩擦係数を μ_0, 動摩擦係数を μ とし，重力加速度の大きさを g とする。

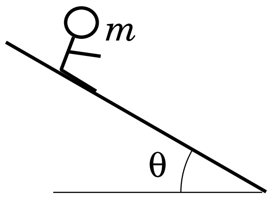


図 4.13

(1) 子供とすべり台（および地球）に働く力を Free-Body Diagrams に示しなさい。力を表す記号は必要に応じて定義しなさい。

(2) 子供の運動方程式を書きなさい。

(3) すべり台の角度がある角度以下のときには子供は静止していた。このとき子供にはたらく摩擦力を m, g，θ を用いて表しなさい。

(4) 傾斜角がある角度 θ より大きくなると子供は滑り出す。その角度 θ を求め，その角度が子供の質量によらないことを示しなさい。

(5) 斜面を滑る子供に働く摩擦力の向きと大きさを述べなさい。

(6) 斜面を滑る子供の加速度を求めなさい。

[解説]

(1) 子供が斜面からうける垂直抗力を N, 摩擦力を F とおくと，子供と斜面に働く力は図 4.14 の通り。

(2) 斜面に沿って x 軸を，斜面に垂直に y 軸をとって子供の位置を表すと子供の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= mg\sin\theta - F \\ m\ddot{y} &= N - mg\cos\theta \end{cases} \tag{4.20}$$

(3) 題意より子供は静止しているので，$\ddot{x} = 0$ を上式の第一式に代入すると

$$F = mg\sin\theta \qquad \cdots (3) \text{ の答} \tag{4.21}$$

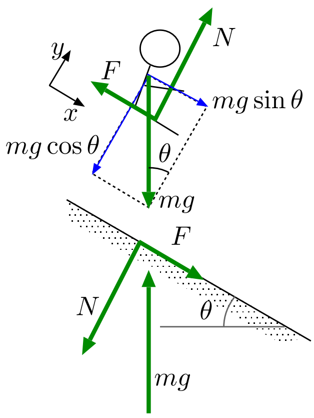


図 4.14 子供と斜面に働く力の Free-Body Diagrams

これが子供にはたらく静止摩擦力の大きさである。**静止摩擦力の大きさは一定ではなく傾斜角に依存して変わることに注意。**

(4) 静止摩擦力がその最大値 $\mu_0 N$ 以下であるときは子供は滑らない。このとき以下が成り立つ。

$$F \leq \mu_0 N \tag{4.22}$$

垂直抗力 N は，子供がすべり台で静止していたことから $\ddot{y} = 0$ であることから式 (4.20) の第二式により求めることができる。

$$N = mg\cos\theta \tag{4.23}$$

式 (4.22) に上式と式 (4.21) を代入すると

$$\begin{aligned} mg\sin\theta &\leq \mu_0 mg\cos\theta \\ \tan\theta &\leq \mu_0 \end{aligned}$$

これが子供が滑らない条件である。よって求める角度は $\theta = \tan^{-1}\mu_0$ であり，この角度は子供の質量によらないことがわかる。

(5) 摩擦力の向きは図 4.14 に示した通り，斜面で平行で上向き。すなわち子供が斜面にそって落下するのを妨げる方向であり，その大きさは動摩擦力の性質により $\mu N = \mu mg\cos\theta$ である。

ちなみに子供が受ける動摩擦力の反作用として，斜面は子供に引きずられるような向き（斜面に平行で下向き）の動摩擦力を受ける。

(6) 前問で求めた動摩擦力を運動方程式 (4.20) に代入すると，子供がすべり台をすべる時の加速度を求めることができる。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \\ \ddot{x} &= g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \end{aligned}$$

上式から，摩擦が働く面を滑りおりるときの加速度も自由落下と同様にその物体の質量によらないことがわかる。

■

4.4 粘性抵抗

雨粒が空から降ってくるとき，雨粒には空気の**粘性抵抗**が働く。**粘性抵抗とは，向きは運動の方向と逆に働き，大きさは速度に比例する力**である（図 4.15）。この比例定数を**粘性定数** (viscosity) とよぶ。物体の速度を v，粘性定数を $\sigma > 0$ とすれば粘性抵抗の大きさは σv である。σv が力を表すことから粘性定数 σ の単位は以下のように表される。

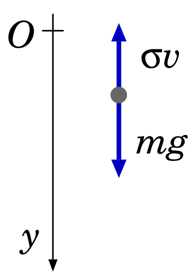


図 4.15

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{[F]}{[v]} = \frac{[\mathrm{N}]}{[\mathrm{m/s}]} \\ &= [\mathrm{Ns/m}] \\ &= [\mathrm{kg/s}] \end{aligned}$$

Free-Body Diagrams や運動方程式を書くとき，**粘性力の向きが速度の向きに依存して変わる**ことに注意しないと間違いやすい。座標軸の向きに注意して，物体の速度が正である場合について粘性抵抗の向きをまず考えると良い。

[例題 4.7] 空から速度 v(下向きを正) で降ってくる質量 m の雨粒には，図 4.15 で示したように重力と粘性抵抗（粘性定数 σ) の力が働く。鉛直下向きに y 軸をとり，以下の問に答えなさい。

(1) 図 4.15 で示されている粘性抵抗が，雨粒の運動の方向 (v の正負) にかかわらず正しい向きを表していることを確認しなさい。
(2) 雨粒の運動方程式を書きなさい。
(3) 運動方程式を解き，雨粒の速度を時間の関数として求め，その振舞をグラフ等を用いて説明しなさい。また，m や σ がいろいろな値をとるときの振舞いも数式に基づいて説明し，それが経験的に感じられる振舞と一致することを確認しなさい。
(4) 鉛直上向きに座標軸をとった場合についても，雨粒の運動方程式を書いてその解を求めなさい。また，その結果が前問と同様の結果を表すことを確認しなさい。

[解説] **(1)** 雨粒が下に落ちているとき，すなわち $v = \dot{y} > 0$(座標軸を下向きにとっていることに注意) のときには，空気の粘性抵抗は上向きに働くので，図の通りでよい。雨粒がどこかに当って上に跳ねた場合には，すなわち $v = \dot{y} < 0$ のときには図中の上向きの矢印の大きさ σv が負ということになる。これは粘性抵抗が下向きであることを意味する。よって雨粒が上に動いているときの抵抗が下向きであることも，この図から説明できることがわかる。
(2) 雨粒の運動方程式は以下の通り。

$$m\ddot{y} = -\sigma v + mg \quad \cdots(答) \tag{4.24}$$

空気抵抗が無い場合，すなわち $\sigma = 0$ の場合には上式は自由落下の運動方程式を表している。
(3) $\dot{y} = v$ を式 (4.24) の左辺に代入すると

$$m\dot{v} = -\sigma v + mg \tag{4.25}$$
$$\dot{v} = -\frac{\sigma}{m}(v - \frac{mg}{\sigma})$$

ここで，

$$V = v - \frac{mg}{\sigma} \tag{4.26}$$

とおくと，

$$\dot{V} = -\frac{\sigma}{m}V \tag{4.27}$$
$$\frac{\dot{V}}{V} = -\frac{\sigma}{m}$$

$$\int \frac{\dot{V}}{V} dt = -\int \frac{\sigma}{m} dt$$
$$\log |V| = -\frac{\sigma}{m} t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$
$$V = \pm e^{-\frac{\sigma}{m} t + C}$$

ここで，定数 $\pm e^C$ を新たに C と置き直すと

$$V = Ce^{-\frac{\sigma}{m} t} \tag{4.28}$$

式 (4.26) を上式に代入すると次式を得る。

$$v = Ce^{-\frac{\sigma}{m} t} + \frac{mg}{\sigma} \quad \cdots (\text{答}) \tag{4.29}$$

上式は，雨粒の速度 v は時間とともに一定値 $v_0 = \frac{mg}{\sigma}$ に近づくことを示す。この速度 v をグラフにすると図 4.16 になる。質量 m が大きい場合や，粘性定数 σ が小さい場合には v_0 は大きくなる。実際，夕立の大粒の雨は普段の雨よりも速い速度で降っているし，空気抵抗が大きければその速度は小さくなるだろう。また，霧雨は地上付近ではほぼ等速度で降っているように見える。このように導きだした式は我々の経験をよく表しているものになっている。

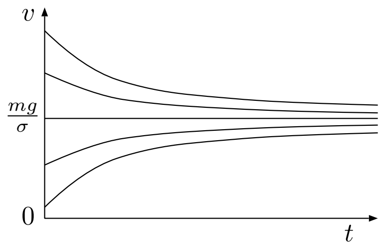


図 4.16 雨粒の速度変化。速度は $v = Ce^{-\frac{\sigma}{m} t} + \frac{mg}{\sigma}$ で与えられる。上の曲線ほど C の値は大きく，中心のちょうど直線になるのは $C = 0$ の場合。初速度に関係なく速度は $v = \frac{mg}{\sigma}$ に近づく。

(4) 座標軸を上向きにとった場合，雨粒が速度の正の方向，つまり上向きに動く場合について，雨粒に働く力を図示すると図 4.17 のようになる。ここで，$v = \dot{y}$ としている。雨粒が下向きに動く場合には，速度 v が負になる。雨粒に働く粘性力は図 4.17 にある粘性力の矢印は下向きになっているが，この場合には横に書いてある粘性力の値が負になるので，実は力の向きが矢印と逆の方向とわかる。このように，v の符号で表される運動の方向と常に逆向きに粘性力が働くことが，この図で表現されていることがわかる。

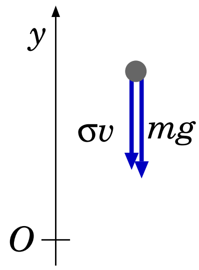


図 4.17

この場合の運動方程式は次式のようになる。

$$m\ddot{y} = -\sigma v - mg \tag{4.30}$$

この方程式は以下のようにして解くことができる。

$$\ddot{y} = -\frac{\sigma}{m}(v + \frac{mg}{\sigma}) \tag{4.31}$$

ここで

$$V = v + \frac{mg}{\sigma} \tag{4.32}$$

とおくと式 (4.27) と同じ微分方程式が得られる。V について微分方程式を解くと式 (4.28) が得られるので，これに式 (4.32) を代入すると次式が得られる。

$$v = Ce^{-\frac{\sigma}{m} t} - \frac{mg}{\sigma} \quad \cdots (\text{答}) \tag{4.33}$$

上式より，雨粒の速度 v は時間とともに一定値 $v_0 = -\frac{mg}{\sigma}$ に近づく。符号が負になっているが，これは下向き（座標軸と逆向き）に雨粒が落ちることを意味している。すなわちこの解は，前問で得られた解と見かけは異なるが，同じ物理現象を表していることがわかる。

■

第 5 章

運動量，力積，力学的エネルギー，仕事

ニュートンとほぼ同時代には，力と運動の関係を明らかにしようと実験および説明を試みる物理学者が多くいた。しかし，ニュートンによる運動方程式と微積分を用いた解析手法が広まるまでには，研究者によって「力」が異なった意味で解釈されたまま，「力」と「運動」に関する激論が交わされていた [32]。

その代表の 1 つは**デカルト**[*] による「物体が力を受けたとき，速度の変化と加わった力の大きさに比例関係がある」，という考え方で，もう 1 つは**ライプニッツ**による「物体が力を受けたとき，速度の 2 乗の変化と加わった力の大きさには比例関係がある」とする考え方である[†]。

「力」と「運動」の関係を探る実験を行おうとすると，多くの場合力を物体に「ある一定の時間」もしくは「ある一定の距離」作用させることになる。この実験手法の違いによる結果の相違がデカルト派とライプニッツ派の論争の原因である。それでは両者の実験手法の違いによってどのように結果が変わるかを検討していこう。

[*] デカルト (René Descartes, 1596-1650, 仏) は哲学者，数学者であり，デカルト座標系 (直交座標系) の発案者でもある。動物機械論，心身二元論を唱えた。また科学の手法として，疑いようのない事実「我思うゆえに我あり」から全てを見直すことを提唱した。

[†] 物体が受けた力を F, これによる物体の速度の変化を Δv とおくと，デカルトは $\Delta v^2 \propto F$ という関係が, ライプニッツは $\Delta v \propto F$ という関係があったと主張していることになる。

5.1　一定の力をうける物体の一次元運動

本節では簡単のため，図 5.1 のように質量 m の物体が一次元空間を力 F を受けて運動している物体についてまず議論する。この物体の運動方程式は以下の通りである。

$$m\ddot{x} = F \tag{5.1}$$

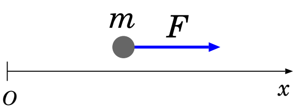


図 5.1

5.1.1　力×時間の作用：運動量と力積

物体に力 F が時刻 t_1 から $t_2 = t_1 + \Delta t$ の間働いたときに物体の速度 $v = \dot{x}$ がどのように変わるかを考えてみよう。まずは、時刻 t から微小時間 dt だけ力 F が物体に加わった時にその作用 Fdt が運動に及ぼす作用を考える。運動方程式 (5.1) の両辺に dt をかけると次式のようになる。

$$m\dot{v}dt = Fdt$$

微小時間 dt は、力 F の大きさの変化は無視出来るくらい短かったとすると、上式の右辺は、微小時間 dt の間の力 F の作用 Fdt を表している。そこで、この作用を時間 t_1 から $t_2 = t_1 + \Delta t$ にわたって足し合わせよう。これは上式を時間 t_1 から $t_2 = t_1 + \Delta t$ まで定積分することを意味する (図 5.2)。すなわち、

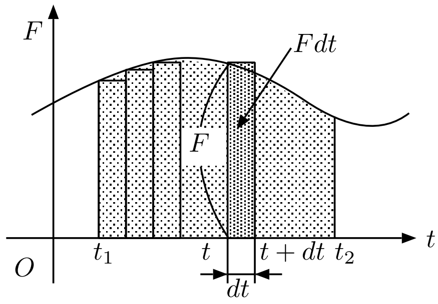


図 5.2 力×時間の作用を考える

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}dt = \int_{t_1}^{t_2} Fdt$$
$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} Fdt. \tag{5.2}$$

ここで、$v_1 = v(t_1)$, $v_2 = v(t_2)$ である。上式から「力×時間 (Fdt) の総和」(右辺) が「運動に関する量 mv」の変化 (左辺) と等しくなることがわかる。ここで、「力×時間 (Fdt) の総和」(右辺) を**力積** (impulse) と呼び、「運動に関する量 mv」を**運動量** (momentum) とよぶ。以上をまとめると、

> 運動方程式 ($m\ddot{x} = F$) を時間で積分すると，左辺からは運動量の変化，右辺からは物体に加わった力積が得られる。

そして，

「運動量の変化」＝「加えられた力積」

である。もし外力が働かなければ ($F = 0$)，運動量 mv は時間によらず常に一定である。

特に F が時間によらず一定の場合には、式 (5.2) より次式を得る。

$$mv_2 - mv_1 = F \cdot (t_2 - t_1)$$
$$= F\Delta t \tag{5.3}$$

つまり、この場合の力積は「力と時間の積 $F\Delta t$」となる。

式 (5.3) からすぐわかるように、**力積の単位と運動量の単位**は同じであり、MKS 単位系で単位を求めると以下のようになる。

$$[\text{運動量}] = [\text{質量・速度}] = [\text{kg·m/s}]$$
$$[\text{力積}] = [\text{力・時間}] = [\text{kg·m/s}]$$

[例題 5.1] ボーリングの球とピンポン球が飛んできて，ぶつかった後に跳ね返った。

(1) 衝突によりうけた力積を求めなさい。その大きさはどちらの球のほうが大きいだろうか。

(2) 衝突前後の運動量の変化の大きさは，どちらが大きいだろうか。

(3) 衝突前後の速度の変化の大きさは，どちらが大きいだろうか。

[解説] 衝突時間 Δt は両者に対して同じである。また一方のボールが他方から受ける力の大きさを F とすれば，他方も向きが逆で同じ大きさ F の力をうける (図 5.3)。よっていずれが受ける力積も大きさは等しく $F\Delta t$ である。また，衝突による力積の大きさが等しいことから，衝突前後の運動量の大きさの変化も同じであることがわかる。

簡単のために直線上の逆方向から質量 M のボーリングの球と質量 m のピンポン球が転がってきてぶつかった場合を，運動方程式を書いて考えてみよう。ボーリング球とピンポン球の位置はそれぞれ x_M, x_m とし，速度をそれぞれ $v_M = \dot{x}_M$, $v_m = \dot{x}_m$ とする。座標軸は図 5.3 のようにとる。

$$\begin{cases} M\ddot{x}_M & = -F \\ m\ddot{x}_m & = F \end{cases} \tag{5.4}$$

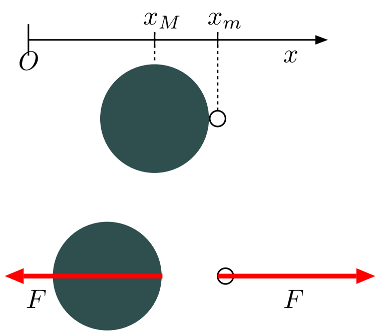


図 5.3　ボーリング球とピンポン球の衝突。下は衝突時に働く力の Free-Body Diagrams

上式を衝突時 ($t = 0$) から衝突後 ($t = \Delta t$) まで積分してみよう。

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\Delta t} M\ddot{x}_M dt & = -\displaystyle\int_0^{\Delta t} F dt \\ \displaystyle\int_0^{\Delta t} m\ddot{x}_m dt & = \displaystyle\int_0^{\Delta t} F dt \end{cases} \tag{5.5}$$

この式より次式を得る。

$$\begin{cases} M\dot{v}_M(\Delta t) - M\dot{v}_M(0) & = -F\Delta t \\ m\dot{v}_m(\Delta t) - m\dot{v}_m(0) & = F\Delta t \end{cases} \tag{5.6}$$

上式より，ボーリング球とピンポン球が衝突時にうけた力積（右辺）の大きさは等しいことがわかる ((1) の答)。また，このことから両者の運動量の変化（左辺）の大きさも等しいことがわかる ((2) の答)。ただし，ボーリング球のほうがピンポン球より重ければ ($M > m$)，速度の変化はピンポン球のほうが大きいということになる ((3) の答)。

■

5.1.2　力×変位（スカラー積）の作用：運動エネルギーと仕事

力 F をうける物体 (図 5.1) が時刻 t_1 から t_2 の間に位置 $x(t_1)$ から $x(t_2) = x(t_1) + \Delta x$ まで動いたとする。このとき物体の速度 $v = \dot{x}$ がどれだけ変わるかを考えてみよう。

まずは、物体が力 F を受けながら位置 x から微小距離 dx だけ動いたとき、力 F が物体に及ぼした作用 Fdx が、物体の運動にどのように影響するかを考えよう。運動方程式 (5.1) の両辺に dx をかけると次式のようになる。

$$m\dot{v}dx = Fdx$$

微小変位 dx の移動にかかる時間は、力の大きさ F の時間変化は無視出来るくらい小さかったとすると、上式の右辺は、微小変位 dt を移動する間の力 F の作用 Fdx を表している。そこで、この力の作用 Fdx を $x_1 = x(t_1)$ から $x_2 = x(t_2)$ まで足し合わせてみよう。これは上式を時間 t_1 から $t_2 = t_1 + \Delta t$ まで定積分することを意味する (図 5.4)。

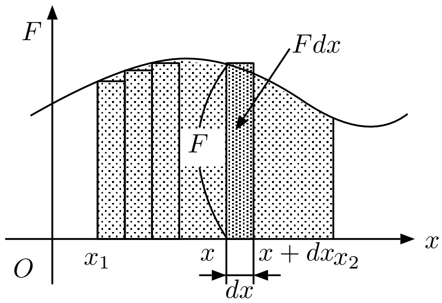


図 5.4　力×変位の作用を考える

$$\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx = \int_{x_1}^{x_2} Fdx \tag{5.7}$$

ここで微小変位 dx は速度 $v = \dot{x}$ と dx 進むのに要した微小時間 dt の積で表すことが出来る。すなわち、$dx = \dot{x}dt = vdt$ なので，上式の左辺は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}vdt \\ &= \frac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.\end{aligned} \tag{5.8}$$

ここで $v_1 = v(t_1) = \dot{x}(t_1)$，$v_2 = v(t_2) = \dot{x}(t_2)$ であり，上式の 2 行目から 3 行目の変形は $\frac{d}{dt}v^2 = 2\dot{v}v$ であることを用いている[*]。

上式を，式 (5.7) に代入すると次式を得る。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} Fdx \tag{5.9}$$

上式の左辺に現れた「運動に関する量 $\frac{1}{2}mv^2$」を**運動エネルギー** (kinetic energy) と呼び，また，右辺に現れた「力×変位 (Fdx) の総和」を**仕事** (work) と呼ぶ。まとめると，

> 運動方程式 ($m\ddot{x} = F$) を位置で積分すると，左辺からは運動エネルギーの変化，右辺からは物体に加わった仕事が得られる。

そして，

「運動エネルギーの変化」＝「外力 F が物体にした仕事」[†]

である。

[*] $I = \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}vdt$ とおいて部分積分を用いることによって次のように求めることもできる。

$$\begin{aligned}I &= \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}vdt \\ &= vv|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v\dot{v}dt \\ &= v^2|_{t_1}^{t_2} - I \\ \therefore I &= \frac{1}{2}v^2\Big|_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

[†] 運動エネルギーを $\frac{1}{2}mv^2$ という表記で定式化し，仕事との関係を明確に表したのは物理学者**ガスパール＝ギュスターヴ・コリオリ** (Gustave Gaspard Coriolis 1792-1843, 仏) である。仕事 (work) という言葉も彼によるものであり，その記述は 1829 年に出版された「Calcul de l'Effet des Machines (Calculation of the Effect of Machines)」に書かれている。(wikipedia「Coriolis」の項より)

もし物体に力が働かなければ ($F = 0$)，運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2(t)$ は変化しない。物体に力が働いても ($F \neq 0$) 進んだ距離が 0 であれば，その力がした仕事は 0 である[‡]。特に、力 F が時間によらず一定の場合には、式 (5.9) を次式のように変形できる。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F \cdot (x_2 - x_1)$$
$$\therefore \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\Delta x \tag{5.10}$$

すなわち、この場合の仕事は $F\Delta x$ と表される。

エネルギーの単位と仕事の単位は式 (5.10) より同じことがわかる。MKS 単位系で表すと，

$$[\text{エネルギー}] = [\text{質量・速度}^2] = [\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$$
$$[\text{仕事}] = [\text{力・距離}] = [\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2]$$

となる。また、エネルギーの単位は略号として **[J]**(ジュール, Joule [*]) を用いる。

[‡] 例えば，水平な床においてある物体に対して重力がする仕事は 0 である。

[*] エネルギーの単位名ジュールは，醸造業を営みながら物理の研究を行っていたジュールの名前による。ジュールについては 6.1 節参照

[問 **5.1**] 外力 F のした仕事は，物体の運動の向きと力 F の向きの関係によって，正になる場合と負になる場合がある。それぞれどういう場合かを説明しなさい。

[問 **5.2**] 図 5.1 で示した，一定の力 F を受けて運動している質量 m の物体について以下の問に答えなさい。

(1) $t_2 = t_1 + \Delta t$ [s] における物体の位置 x_2 と速度 v_2 を，運動方程式を積分することにより求め，x_1, v_1 を使って表しなさい。
(2) 時刻 t_1 から t_2 の間の，運動エネルギーの変化を (1) の結果より求めなさい.
(3) 力 F が Δt 秒の間にした仕事を，その間の変位と力の積により求めなさい.
(4) (2) と (3) の計算結果を比較し，**外力 F のした仕事が物体の運動エネルギーの変化に等しい**ことを示しなさい.

5.1.3 力が運動に与える影響

前節までの議論を簡単にまとめると，以下のようになる。

> **力と時間の積である力積は運動量の変化**を表し，**力と変位の積である仕事は運動エネルギーの変化**を表す。

そして，ニュートンが記述したように

> **時間や変位と独立に表現した力は加速度**を引き起こす。

デカルトは力積を，ライプニッツは仕事を力として捉えており，その概念の違いが明確にされないまま両者の対立がおきていただけで，いずれもニュートン力学のもとで統一的に説明できる。

我々の周囲の「力」は「時間」や「変位」をともなって観測される。ニュートンによる表現は「力」を「変位」や「時間」と独立に切り離した点で，極めて論理的かつ理想的な表現であるが，それだけに日常感じる「力」の概念とやや隔たりがあ

る。このため，「力積」「仕事」そして「力」の概念がそれぞれ異なるものとして明確に分離されるようになったのは，実に１９世紀になってからであった [32]。

> **[例題 5.2]** 高い塔の上から 1kg のボールを静かに落とした。重力加速度の大きさを $g = 9.8$ m/s^2 とし，空気抵抗は無視できるとして以下の問に答えなさい。
>
> (1) 物体の 1 秒後の速度を求めなさい。
> (2) 1 秒後までに落下した距離を求めなさい。
> (3) 10 m 落下したときの速度と，この間に重力がした仕事を求めなさい。

[解説] **(1)** t 秒後の物体の速度を $v(t)$ で表し，鉛直上向きを正の向きに取る。題意の落下中の物体には重力のみが働くので，重力が物体に与えた力積と物体の運動量の変化には以下の関係がある。

$$mv(1) - mv(0) = -mg \cdot 1\ [\mathrm{s}]$$

上式より物体の 1 秒後の速度は以下のように求まる。ここで，問題文中の「静かに落とす」とは，落とした瞬間の速度が 0 であることを意味する定性的表現であることに注意せよ。

$$v(1) = v(0) - g \cdot 1\ [\mathrm{s}] = -9.8\ [\mathrm{m/s}] \tag{5.11}$$

つまり，物体の 1 秒後の速度は -9.8 m/s(下向きに 9.8 m/s) であることがわかる。
(2) t 秒後の物体の位置を $x(t)$ とし，はじめの位置を原点に取る。重力が物体にした仕事と物体の運動エネルギーの変化には以下の関係がある。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2(1) - \frac{1}{2}mv^2(0) &= -mg \cdot \{x(1) - x(0)\} \\ &= -mgx(1)\end{aligned}$$

上式に式 (5.11) を代入すると $x(1\mathrm{s})$ を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}x(1) &= -\frac{1}{2g}\left\{v^2(1) - v^2(0)\right\} \\ &= -\frac{1}{2 \times 9.8\ [\mathrm{m/s^2}]} \cdot (9.8\ [\mathrm{m/s}])^2 \\ &= -4.9\mathrm{m}\end{aligned} \tag{5.12}$$

よって物体は 1 秒間に 4.9 [m] だけ下に落下した事がわかる。
(3) 10m 落下した時の速度を v_{10} と表すと，重力が物体にした仕事と物体の運動エネルギーの変化には以下の関係がある。

$$\frac{1}{2}mv_{10}^2 - \frac{1}{2}mv^2(0) = -mg \cdot (-10\ [\mathrm{m}] - 0\ [\mathrm{m}])$$

上式の右辺が重力がした仕事であり，計算すると $mg \cdot 10\ [\mathrm{m}] = 98\ [\mathrm{J}]$ であることがわかる。また，v_{10} は以下のように求めることができる。

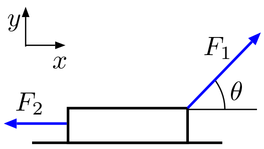
$$\begin{aligned}v_{10}^2 &= 2g \cdot 10\ [\mathrm{m}] = 196\ [\mathrm{m^2/s^2}] \\ v_{10} &= \sqrt{196\ [\mathrm{m^2/s^2}]} = \sqrt{(7 \times 2)^2}\ [\mathrm{m/s}] \simeq 14\ [\mathrm{m/s}] \quad \cdots (答)\end{aligned}$$

■

5.2 複数の力をうける物体の運動

前節では，物体が運動方向と同じ向きの力を受ける場合について，力と運動の関係を議論してきた。ここでは，物体が運動方向と異なる向きから複数の力を受ける場合についての力積や仕事について議論する。

[例題 5.3] なめらかな水平面に置かれている質量 m の物体がある。時刻 $t=0$ において物体は静止していたが，図のように物体は角度 θ 右上方向に力 F_1 を，左側水平方向に F_2 をうけて，時間 Δt の間に x 軸の正の方向に距離 l 進んだ。



(1) 物体の運動量の変化を求めなさい。
(2) 距離 l 進んだ後の速度を Δt を使って表しなさい。
(3) Δt の間に力 F_1, F_2 が物体にした仕事をそれぞれ求めなさい。
(4) Δt の間に重力が物体にした仕事をそれぞれ求めなさい。
(5) 物体の運動エネルギーの変化量を求めなさい。
(6) 距離 l 進んだ後の速度を l を使って表しなさい。

[解説]

(1) 水平方向 (物体が進んだ向き) に x 軸を，鉛直方向に y 軸をとり，物体がはじめあった位置を原点としよう。物体が床から受ける垂直抗力を N とおき，物体に働く力を図示すると図 5.5 になる。物体の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F_1\cos\theta - F_2 \\ m\ddot{y} &= N + F_1\sin\theta - mg \end{cases} \tag{5.13}$$

両辺を時刻 0 から Δt の間で積分すると

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\Delta t} m\ddot{x}dt &= \displaystyle\int_0^{\Delta t}(F_1\cos\theta - F_2)dt \\ \displaystyle\int_0^{\Delta t} m\ddot{y}dt &= \displaystyle\int_0^{\Delta t}(N + F_1\sin\theta - mg)dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\dot{x}(\Delta t) - m\dot{x}(0) &= (F_1\cos\theta - F_2)\Delta t \\ m\dot{y}(\Delta t) - m\dot{y}(0) &= (N + F\sin\theta - mg)\Delta t \end{cases} \tag{5.14}$$

物体は鉛直方向には運動しないので $y=$ 一定 より常に $\dot{y}(t)=0$ である。ゆえに式 (5.14) の第二式より鉛直方向の運動量の変化は 0 であり，第一式より水平方向の運動量の変化は $(F_1\cos\theta - F_2)\Delta t$ である。

(2) 題意より $\dot{x}(0)=0$ なので，距離 l 進んだ時，すなわち時間 Δt 後の速度は式 (5.14) の第一式より以下のようになる。

$$\dot{x}(\Delta t)=\frac{1}{m}(F_1\cos\theta-F_2)\Delta t$$

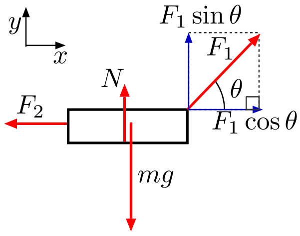


図 5.5 物体に働く力

(3) 各力がした仕事は物体の進行方向，本問では x 軸に沿って運動方程式を距離で積分することによって得られる。式 (5.13) の第一式の両辺を距離で積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^l m\ddot{x}dx &= \int_0^l (F_1\cos\theta-F_2)dx\\ &= \int_0^l F_1\cos\theta dx+\int_0^l(-F_2)dx\end{aligned}$$

この右辺第一項と第二項がそれぞれ力 F_1 と F_2 のした仕事である。さらに計算すると

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\Delta t)-\frac{1}{2}m\dot{x}^2(0)=F_1\cos\theta\cdot l+(-F_2 l) \tag{5.15}$$

ここで，左辺の計算は式 (5.8) 参照。上式より力 F_1 と F_2 のした仕事はそれぞれ $F_1\cos\theta\cdot l$ と $-F_2 l$ である。この結果より

> **一定の力 F のする仕事は，物体の運動方向への力の作用と進んだ距離の積で得られる**

ことがわかる。また，

> **力 F のする仕事は，物体の運動方向への力の作用と物体の運動の向きが同じなら正，異なれば負である。**

(4) (5.15) 式において重力 mg の項が無い。このことは重力のした仕事が 0 であったことを示している。

前問で述べたように一定の力 F のする仕事は，物体の運動方向への力の作用と進んだ距離の積で得られるが，このことから

> **物体の運動方向と直交する向きの力のする仕事は 0 である**

ことがわかる。

(5) 式 (5.15) より，**運動エネルギーの変化量は各力によりなされた仕事の総和，**すなわち $F_1\cos\theta\cdot l+(-F_2 l)$ により与えられることがわかる。

(6) 式 (5.15) より，l 進んだ時の速度は以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\Delta t)&=(F_1\cos\theta-F_2)l\\ \dot{x}(\Delta t)&=\sqrt{\frac{2}{m}(F_1\cos\theta-F_2)l}\end{aligned}$$

■

5.3 ベクトルによる力積・仕事の議論 *

これまでは力の方向と運動の方向が一致し，また力の大きさが一定の場合を扱ってきた。本節では，三次元空間において力が時間の関数で与えられる場合に議論の拡張を行おう。

質量 m の物体の位置を $\boldsymbol{x}$, 物体に働く力を $\boldsymbol{F}(t)$ とすると，物体の運動方程式は以下の通りである。

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t) \tag{5.16}$$

この式の両辺を時間や位置で積分することにより，以下のように力積や仕事の議論を行うことができる。

5.3.1 運動量と力積

時刻 t_1 から t_2 の間物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働いたとしよう。このときの物体の運動の変化は，式 (5.16) の両辺を時間で積分することによって得られる。

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\boldsymbol{x}}dt &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)dt \\ m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)dt \end{aligned} \tag{5.17}$$

ここで，$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ である。上式左辺の $m\boldsymbol{v}$ が運動量であり、右辺が力積の一般的な表現である。すなわち、

運動量と力積はベクトル

であり、1 次元の場合と同様に

運動量の変化は与えられた力積に等しい

ことがわかる。

特に，物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ が時間によらない時には次式が成立する。

$$m\boldsymbol{v}(t_2) - m\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{5.18}$$

ここで，$\Delta t = t_2 - t_1$ である。上式の各座標成分に注目すると，式 (5.3) と同じ形に書くことができることがわかる。

5.3.2 運動エネルギーと仕事

物体が位置 $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ まで動くとき，この区間で式 (5.18) の両辺を積分してみよう。

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{F}(t) \cdot d\boldsymbol{x} \tag{5.19}$$

微小変位 $\boldsymbol{dx}$ が微小時間 dt の間に起こったとすると $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{v}dt$ と書くことができるので，左辺は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{dx} &= \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{v}dt \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで，$v_1 = |\boldsymbol{v}(t_1)|$, $v_2 = |\boldsymbol{v}(t_2)|$ である。上式と式 (5.19) より次式をえる。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{dx} \tag{5.21}$$

上式の左辺は運動エネルギーの変化を、右辺は力 $\boldsymbol{F}(t)$ がする仕事 W を表す。したがって、

運動エネルギーと仕事はスカラー量

であり、

運動エネルギーの変化は力 $\boldsymbol{F}$ によってなされた仕事に等しい

ことがわかる。運動量と力積の関係式 (5.17) はベクトルで表されるので，各座標軸方向に成立する。一方，運動エネルギーと仕事の関係はスカラーの関係式になっており，各座標軸方向に成り立つ式ではないことに注意せよ。

式 (5.21) より，$\boldsymbol{F}$ が時間によらない定ベクトルならば次式が成立する。

$$\frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{x} \tag{5.22}$$

ここで $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ は変位ベクトルである。すなわち，

力が一定ならば，仕事は力ベクトルと変位ベクトルのスカラー積 (内積) で与えられる。

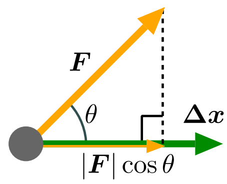


図 5.6

式 (5.22) の右辺は次のように書くことができる。

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\Delta x} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{\Delta x}|\cos\theta \tag{5.23}$$

θ は力ベクトル $\boldsymbol{F}$ と変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{x}$ のなす角である (図 5.6)。したがって，

仕事は，力 $\boldsymbol{F}$ の変位ベクトル方向成分 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ と変位の大きさ $|\Delta\boldsymbol{x}|$ の積で与えられる

と言うこともできる。

[**問 5.3**] 式 (5.20) を得る式変形を，$\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{dx} = (dx, dy, dz)$ とおいてベクトルの成分の計算をすることによって確認しなさい。

5.4 位置エネルギーと運動エネルギー

物体が落下するとき，重力による仕事が物体の運動エネルギーになる。物体が高いところから落下する程，重力のする仕事は大きくなるので物体の運動エネルギー

は大きくなる。この重力がする仕事を，物体がその高さに応じたエネルギー (位置エネルギー) を持つと捉え直すことにより運動の議論を行ってみよう。

5.4.1 重力による仕事と位置エネルギー

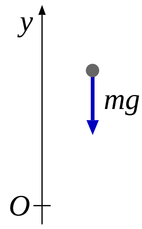


図 5.7

物体がある位置 (高さ) から基準の高さまで移動するときに重力がする仕事を，重力による位置 (ポテンシャル) エネルギーと呼ぶ。 図 5.7 のように質量 m の質点が重力を受けて垂直に落下する場合を例にして位置エネルギーを求めてみよう。

鉛直上向きに y 軸をとると質点の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{y} = -mg \tag{5.24}$$

位置エネルギーの基準点を $y = y_0$ とすると，質点が高さ $y = h$ にあるときの位置エネルギー $U(h)$ は，質点が $y = h$ から基準点 $y = y_0$ まで動いたときに重力がする仕事で与えられる。すなわち，

$$U(h) = \int_h^{y_0} (-mg)dy = mg(h - y_0) \tag{5.25}$$

となる。基準点を原点にとると ($y_0 = 0$)，位置エネルギーは次式で与えられる。

$$U(h) = \int_h^{0} (-mg)dy = mgh \tag{5.26}$$

このように，**重力による位置エネルギーは物体の高さの関数**であり，物体の高さに比例して大きくなる。すなわち高い位置にある物体は大きな位置エネルギーを持つ。これは，物体を低い位置から高い位置に動かすには，その位置エネルギーの差を補うだけの仕事を外力がしないといけないことを意味する。

[問 5.4: 座標軸の向きと位置エネルギー]
座標軸の正の方向を鉛直下向きに取り，位置エネルギー $U(y)$ の基準点を原点にした場合には $U(y) = -mgy$ となることを，位置エネルギーの定義に基づいて証明しなさい。

[解説] 座標軸の定義により位置エネルギーの表記は変わる。位置エネルギーを与える式を公式として覚えないこと。高い場所ほど位置エネルギーが大きいことを理解しておくと，座標軸の向きが変わっても位置エネルギーの式を間違えずにすむ。

5.4.2 力学的エネルギー保存則

図 5.7 の質点が高さ $y_1 = y(t_1)$ から $y_2 = y(t_2)$ まで動いたときに重力がする仕事を求めてみよう。式 (5.24) を位置で積分することにより次式を得る。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{y_1}^{y_2} (-mg)dy$$

ここで，$v_1 = \dot{y}(t_1)$, $v_2 = \dot{y}(t_2)$ である。右辺の重力がした仕事を，式 (5.25) で求めた位置エネルギー $U(h)$ を用いて変形すると以下のように書くこともできる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{y_1}^{y_0}(-mg)dy + \int_{y_0}^{y_2}(-mg)dy \\ &= \int_{y_1}^{y_0}(-mg)dy - \int_{y_2}^{y_0}(-mg)dy \\ &= U(y_1) - U(y_2)\end{aligned}$$

上式を変形すると次式を得る。

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + U(y_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + U(y_2) \tag{5.27}$$

この式は自由落下運動において異なる時点 ($y = y_1$ と $y = y_2$) における位置エネルギーと運動エネルギーの和が等しいことを示す。**この位置エネルギーと運動エネルギーの和を力学的エネルギー**[*](mechanical energy) とよぶ。すなわち

[*] 自由落下における位置エネルギーは重力による位置エネルギーだが，力学的エネルギーには重力以外の力による位置エネルギー（後述）も含まれる。

自由落下運動において力学的エネルギーは保存する

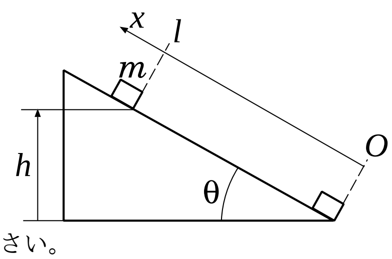
ことがわかる。

[問 5.5] 自由落下をする質点の運動 (運動方程式 (5.24)) について以下の問に答えなさい。

(1) 時刻 $t = 0$ の時質点は落下を開始した。運動方程式を時間で積分することによって，時刻 t における質点の位置と速度を求めよ。
(2) 時刻 t における位置エネルギー及び運動エネルギーをそれぞれ求め，力学的エネルギー (位置エネルギーと運動エネルギーの和) が常に保存している事を示しなさい。

5.4.3 保存力

[例題 5.4] 質量 m の物体が高さ h 落ちるとき，鉛直下向きに落ちるときと，斜面に沿って落ちるときでは重力のする仕事は異なるかどうかを考えてみよう。図のように斜面の傾斜角は θ で，摩擦は無視できるとして以下の問に答えなさい。



(1) 物体が斜面にそって距離 l だけすべり落ちたとき，重力がした仕事を求めなさい。

(2) はじめ物体があった高さを h とする。前問で求めた重力による仕事を h を使って書き直しなさい。その結果が，物体が自由落下によって高さ h 落ちる間に重力がする仕事と等しいことを確認しなさい。

(3) 物体ははじめ静止していたとする。斜面に沿って l 落ちたときの速さを求めなさい。

[解説] (1) ここでも運動方程式から重力のする仕事を計算してみよう。物体に働く力を図 5.8 に示す。物体の運動方程式は次式の通り。

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta \tag{5.28}$$

上式の右辺を $x = l$ から $x = 0$ まで位置で積分すると重力が物体にした仕事を得ることができる。

$$\begin{aligned}\int_l^0 (-mg\sin\theta)dx &= -mg\sin\theta \cdot x|_l^0 \\ &= mgl\sin\theta \quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

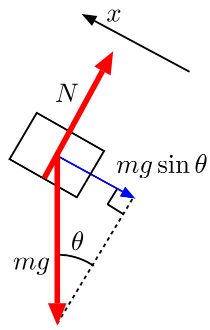


図 5.8

[別解] 仕事とは何かが理解できたら，力の作用と移動距離から単純に求めても良い。重力の斜面方向の成分は $mg\sin\theta$ なので，物体が斜面にそって距離 l すべり落ちる間に重力がする仕事 W は

$$W = mg\sin\theta \cdot l = mgl\sin\theta \quad \cdots(\text{答}) \tag{5.29}$$

である。このとき，力の作用と物体の進行方向が同じなので符号が正であることに注意せよ。

(2) l, θ, h の間には関係式 $l\sin\theta = h$ が成立するので，これを式 (5.29) に代入すると，

$$mgl\sin\theta = mgh \tag{5.30}$$

この式は，重力が物体にする仕事は斜面の傾斜角に無関係であり，物体の高さの変化のみで決まることを示している。よって，その値は自由落下する場合 (式 (5.29) で $\theta = \pi/2$ の場合) とも等しい。

この例題より，**物体の運動が重力の方向と異なる場合にも，重力が物体にする仕事は高さの変化だけに依存すること**，すなわち重力は保存力であることを確認できる。

(3) 式 (5.28) の両辺を $x = l$ から $x = 0$ まで位置で積分すると次式が得られる[*]。

$$\begin{aligned}\int_l^0 m\ddot{x}dx &= -\int_l^0 mg\sin\theta dx \\ \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_l^2 &= mgh\end{aligned} \tag{5.31}$$

ここで，v_l は初速度であり題意より $v_l = 0$，v_0 は l すべり降りたとき ($x = 0$) の速度の大きさである。よって

$$v = \sqrt{2gh} \quad \cdots(\text{答})$$

この値は斜面の角度に依存しない。すなわち，斜面をすべり降りたときも鉛直方向に落ちたときにも、物体の速さは同じ値になることに注意せよ。

[*] 式変形は 5.1.2 節および本問の (1)(2) の解答を参照

式 (5.31) は変形すると

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_l^2 + mg \cdot 0$$

この式は，**重力による運動において力学的エネルギーは保存する (力学的エネルギー保存則が成り立つ)** ことを示している。本問の答を導くには，力学的エネルギー保存則により上式を作り，ただちに落下後の速度 v_l を求めてもよい。

上の例題から，物体が $y = h$ から $y = 0$ まで動いたときに重力がする仕事は物体の運動の経路によらないことを推測できる。さらに、質点を高さ $y = h$ の位置から y_1 を経由して基準位置 y_0 に動いたときにも同じ値になるかを確認してみよう (図 5.9)。

このとき，重力が質点にした仕事は次式で与えられる。

$$\int_h^{y_1} (-mg)dy + \int_{y_1}^{y_0} (-mg)dy = \int_h^{y_0} (-mg)dy$$

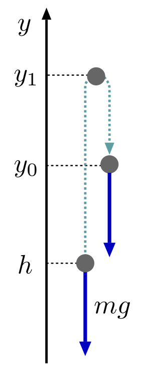


図 5.9

これは結局高さ y の位置から直接基準位置 y_0 にいくまでに重力がした仕事，すなわち位置エネルギーに等しい。このように, 物体の 2 点間の移動において重力がする仕事が運動経路によらないことは，より一般的に 3 次元運動について証明することができる (5.4.4 節参照)。

重力のように，物体の 2 点間の移動においてある力による仕事が経路によらず一定になるとき，その力は**保存力** (conservative force) であるといい，その力に対する位置エネルギーを定義することができる[*]。そして，

物体が保存力のみにより運動を行うとき力学的エネルギーは保存する[†]

このとき「 **力学的エネルギー保存則**が成り立つ」と言う。重力やばねの力は保存力であるが[‡]，摩擦力や粘性力は 5.8 節で説明するように保存力ではない。保存力でない力は**非保存力** (nonconservative force) と呼ぶ。

[*] 位置エネルギーの定義については 5.5 節で述べる。

[†] 証明については 5.7 節参照

[‡] 詳細は 5.5 節で述べる。ばねの力が保存力となるのは，厳密にはばねの内部の抵抗力を無視した理想的な場合である。

5.4.4 重力が保存力であることの証明 *

質量 m の物体が位置 $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ まで動く間に重力が物体にする仕事 W_{12} は，重力加速度ベクトルを $\boldsymbol{g}$ とおくと次式で与えられる。

$$W_{12} = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} m\boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{5.32}$$

ここで変位ベクトル $d\boldsymbol{x}$ と重力加速度ベクトルのなす角を θ とすると，

$$W_{12} = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} |m\boldsymbol{g}||d\boldsymbol{x}| \cos\theta$$

位置 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の鉛直成分をそれぞれ y_1 と y_2（鉛直上向きを正とする），変位ベクトルの鉛直成分を dy と書くと

$$dy = -|\boldsymbol{dx}|\cos\theta \tag{5.33}$$

なので (図 5.10)，

$$W_{12} = \int_{y_1}^{y_2} mg(-dy) = mg(y_1 - y_2) \tag{5.34}$$

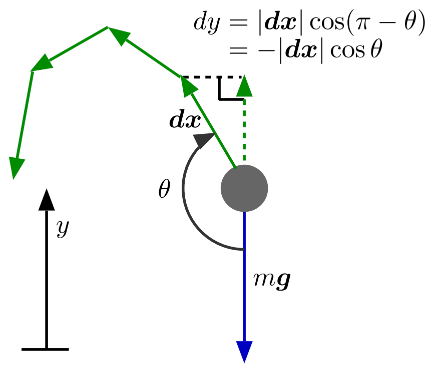


図 5.10

上式は，重力が物体に対してする仕事は始点及び終点の高さのみで決まることを示すので**重力は保存力**と言える。

また，位置エネルギー $U(y)$ の基準位置を $\boldsymbol{x_0}$ （高さ y_0）とすれば，W_{12} は次のように位置エネルギーの差で表すことができる。

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{dx} \\ &= \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_0} m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{dx} - \int_{\boldsymbol{x}_2}^{\boldsymbol{x}_0} m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{dx} \\ &= U(y_1) - U(y_2) \end{aligned} \tag{5.35}$$

ここで，鉛直上向きに y 軸をとっていれば $U(y) = mgy$ である。

5.5 いろいろな力の位置エネルギー

保存力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ に対して，

> **位置エネルギーとは，質点を基準とする点まで動かす間に力が質点に対して行う仕事**

として定義される。仕事の定義式より，力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ に対する**位置エネルギー** U **の定義式**は次のようになる。

$$U(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{dx} = -\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{dx} \tag{5.36}$$

ここで，$\boldsymbol{x}_0$ は基準点の位置である。上式より，位置エネルギーは**物体を基準点からある位置まで動かしたときに，重力がした仕事の符号を反転したもの**と言いかえることもできる。

以下ではこの定義にしたがって，ばねの弾性力や万有引力に対する位置エネルギーを求めてみよう。

5.5.1 万有引力の位置エネルギー

[例題 **5.5**] 万有引力による位置エネルギーを求めよう。質量 M の物体 A の位置を原点とした時，距離 r 離れた質量 m の物体 B の万有引力による位置エネルギーを，以下の 2 つの場合について求めなさい。位置エネルギーの基準点は無限遠点 $r=\infty$ とする。

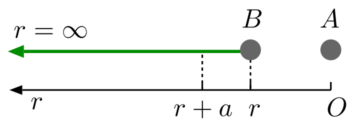


図 5.11

(1) 物体 B を物体 A と逆方向にまっすぐ無限遠点まで移動したときの万有引力による仕事, すなわち，無限遠点を基準点としたときの万有引力による位置エネルギーを求めなさい。

(2) 位置エネルギーの基準点を $r=0$ としなかったのは何故だろう？

(3) 質量 m の物体が地表付近において基準点に対して高さ h の位置にあるとき，その物体の位置エネルギー $U_g(h)$ は $U_g=mgh$ と書けることを 5.4.1 節で説明した。前問で導いた U_G と U_g の関係を表す式を導出しなさい。

[解説] **(1)** 図のように物体 B の運動の方向に座標軸を取り，物体 A, B 間の距離を r とおく。物体 B が A からうける万有引力 F は $F=-G\dfrac{mM}{r^2}$ となるので，無限遠点を基準点としたときの万有引力による位置エネルギー $U_G(r)$ は次式のように求めることが出来る。

$$
\begin{aligned}
U_G(r) &= \int_r^\infty (-G\frac{mM}{r^2})dr \\
&= GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^\infty \\
&= -G\frac{mM}{r}
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

上式より $U_G(r)$ は，物体 A から遠ざかるほど大きくなることがわかる。

(2) 物体 A から距離 r の位置にある物体 B が, 距離 0 の点まで移動する間に万有引力がする仕事，すなわち，基準点を $r=0$ としたときの位置エネルギー U_G^0 を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
U_G^0(r) &= \int_r^0 (-G\frac{mM}{r^2})dr \\
&= GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^0 \\
&= GmM(\infty - \frac{1}{r})
\end{aligned}
$$

このように，基準点を $r=0$ とすると U_G^0 は無限大の値をとってしまうため，重力の位置エネルギーに基準点は一般に無限遠点が選ばれる。

(3) A が地球であるとし, 地球の半径を R, $r=R+h$, $(R \gg h)$ とおいて式 (5.37)

を書き直すと以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
U_G(r) &= -G\frac{mM}{R+h} \\
&= -G\frac{mM}{R(1+\frac{h}{R})} \\
&\simeq -G\frac{mM}{R}(1-\frac{h}{R}) \\
&= -G\frac{mM}{R} + mgh \\
&= U_G(R) + U_g(h)
\end{aligned}
$$

上式の変形では，一般に $x \ll 1$ に対して $\dfrac{1}{1+x} \simeq 1-x$ が成り立つことと，$g = G\dfrac{M}{R^2}$ を用いた (3.5.3 節参照)。上式は，

$$
U_G(r) - U_G(R) = U_g(h) \tag{5.38}
$$

と変形できるので，万有引力による位置エネルギー U_G の基準点を地表にとりなおすと，U_g と等しくなることがわかる。

■

5.5.2　万有引力が保存力であることの証明 *

物体 A から距離 r の位置にあった物体 B が無限遠点まで移動するときに，両者の間に働く万有引力が物体 B にする仕事 U_G は，途中の経路によらず同じ値になること，すなわち，万有引力が保存力であることを証明しておこう。

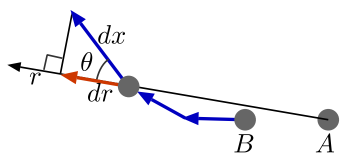


図 5.12

物体 A から B に向かう単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{r}}$ とおくと，物体 B が A からうける万有引力 $\boldsymbol{F}$ は次式のとおりである。

$$
\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{5.39}
$$

物体 B が任意の経路をたどって，物体 A から距離 r の位置から無限遠点まで移動するときに万有引力がする仕事 U_G は以下で与えられる。

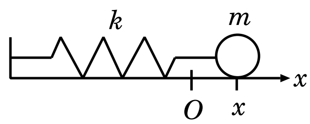
$$
\begin{aligned}
U_G &= \int_{|\boldsymbol{x}|=r}^{|\boldsymbol{x}|=\infty} -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{x} \\
&= \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}|\hat{\boldsymbol{r}}|\cos\theta dx \\
&= \int_r^\infty -G\frac{Mm}{r^2}dr \\
&= -G\frac{mM}{r}
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

上式の 2 行目から 3 行目では $dr = dx\cos\theta$ を用いた (図 5.12)。この式より，万有引力が物体にする仕事は物体の始点と終点のみに依存して途中の経路に依存しないこと，すなわち，万有引力は保存力であり，位置エネルギーを定義できることがわかる。

5.5.3 弾性エネルギー：ばねの位置エネルギー

位置エネルギーは万有引力以外の保存力についても定義される。以下の例題で，ばねの復元力について位置エネルギーをどのように定義できるかを調べてみよう。

[例題 **5.6**] 図のように，ばね定数 k のばねの端にとりつけられた質量 m の小球が運動している。ばねの質量や摩擦は無視できるとして以下の問に答えなさい。



(1) 原点をばねの自然長の位置にとり，物体の位置（ばねの伸び）を x とする。物体 m の x 軸方向の運動方程式を書きなさい。

(2) 物体が位置 x から基準点まで動く間に，ばねが物体にする仕事を**ばねの位置エネルギー**もしくは**弾性エネルギー** (elastic potential energy) と呼ぶ。基準点を原点にした場合について，ばねの位置エネルギーを与える式を導きなさい。

(3) ばねの位置エネルギーと物体の運動エネルギーの総和 (力学的エネルギー) が保存することを説明しなさい。

(4) ばねを A だけ引き延ばして静かに手を離したとき，原点での物体の速度を求めなさい。

(5) ばねの伸びが l の位置を基準点とした場合には，ばねの位置エネルギーはどのようになるかを求め，基準点を自然長の位置とした場合に定数が加わった式で与えられることを確認しなさい。

(6) 物体が位置 x_1 から x_3 を経由して x_2 まで移動したとき $(x_1 < x_2 < x_3)$ にばねのした仕事を求め，仕事が始点と終点のみで与えられること，すなわちばねの力が保存力であることを確認しなさい。

[解説] **(1)** ばねの x 軸方向の運動に作用する力はバネの力のみなので，運動方程式は次式の通りになる。

$$m\ddot{x} = -kx \tag{5.41}$$

(2) 物体が位置 x から O まですすむ間にバネがする仕事，すなわち，基準点を原点としたときの位置 x におけるバネの位置エネルギー $U_0(x)$ は, 運動方程式 (5.41) を x で積分した式の右辺で表される。すなわち，

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \int_x^0 (-kx)dx \\ &= -k[\frac{1}{2}x^2]_x^0 \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

(3) 物体の位置が x_1 から x_2 まで変化したときの物体の運動の変化を調べるた

め，運動方程式 (5.41) の両辺を位置 x で積分してみよう。

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx &= \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx \\
\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{x_1}^{0} (-kx)dx + \int_{0}^{x_2} (-kx)dx \\
&= \int_{x_1}^{0} (-kx)dx - \int_{x_2}^{0} (-kx)dx \\
&= U_0(x_1) - U_0(x_2) \\
\therefore \frac{1}{2}mv_1^2 + U_0(x_1) &= \frac{1}{2}mv_2^2 + U_0(x_2)
\end{aligned} \tag{5.42}
$$

上式により, 物体の運動がばねの力の作用のみによる場合, その力学的エネルギーは常に一定になることがわかる。

(4) ばねの伸びが A のときと，0 のとき (原点に物体がきたとき) の力学的エネルギーは同じなので, のびが 0 のときの物体の速度を v とおくと次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}mv^2 \\
\therefore v &= \pm A\sqrt{\frac{k}{m}}
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

右辺の符号 $\pm$ は，物体が原点を左方向へ横切るときと, 右方向に横切るときがあることを示している。いずれの方向に動いているときにも，その速さは同じであり，はじめの伸び A やばね定数 k が大きいと速さも大きくなり，物体の質量 m が大きいと速さは小さくなることが分かる。

(5) バネの伸びが l のときを基準点とした場合の位置エネルギー $U_l(x)$ は次式となる。

$$
\begin{aligned}
U_l(x) &= \int_{x}^{l} (-kx)dx \\
&= -k[\frac{1}{2}x^2]_x^l \\
&= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kl^2 \\
&= U_0(x) - U_0(l)
\end{aligned}
$$

よって U_l は，原点を基準とした場合の位置エネルギーに定数 $U_0(l) = \frac{1}{2}kl^2$ だけ加わった式になる。この位置エネルギー $U_l(x)$ を用いても，(2)(3) の議論は同様に成り立つことに注意。

(6) 物体が x_1 から x_3 を経由して x_2 まで移動したときのバネの仕事は以下の通りである。

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_3} (-kx)dx + \int_{x_3}^{x_2} (-kx)dx &= -\left(\frac{1}{2}kx_3^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_3^2\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx
\end{aligned} \tag{5.44}
$$

よって，この仕事は始点と終点のみで与えられ、途中の経路には依存しない。すなわち，バネの力は保存力である。

5.6 位置エネルギーと力 *

5.5 節で述べた式 (5.36) は力から位置エネルギーを定義する式であるが，逆に位置エネルギー U が与えられた場合には，その位置エネルギーを与える力を次式により求めることができる。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla U(\boldsymbol{x}) \tag{5.45}$$

ここで，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ は，ベクトル演算子の一種であり，ナブラと呼ぶ。スカラー関数[*1] $f(x,y,z)$ に対する演算では以下のように計算する。

$$\nabla f(x,y,z) = (\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f). \tag{5.46}$$

$w = f(x,y,z)$ が位置 (x,y,z) におけるなんらかの密度を表す時には ∇f は，その密度変化の**勾配** (gradient) が最も大きくなる方向を表す。∇f は grad$f$ とも書き，”グラディエント　エフ” と呼ぶ。

一般に，保存力 $\boldsymbol{F}$ に対して式 (5.45) をみたす $U(\boldsymbol{x})$ を力 $\boldsymbol{F}$ の**ポテンシャル** (potential) [*2]とよぶ。ただし，$U(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{F}$ のポテンシャル関数ならば $U(\boldsymbol{x})+C$ (C:定数) もポテンシャル関数になるので，力 $\boldsymbol{F}$ に対するポテンシャル $U(\boldsymbol{x})$ 関数は一意には決まらない。この C をある値に定めたものを**位置エネルギー**あるいは**ポテンシャル・エネルギー** (potential energy) とよぶ。

[問 5.6] $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$, $\boldsymbol{F} = (f_x, f_y, f_z)$, $\boldsymbol{dx} = (dx, dy, dz)$ とおいて式 (5.36) の両辺を (x,y,z) の各変数で偏微分することにより式 (5.45) が得られることを確認しなさい。

練習問題 5.1 位置エネルギーが以下のように与えられるとき，各位置エネルギーによる力 $\boldsymbol{F}$ を求め，その大きさと向きについて説明しなさい。

(1) $U(y) = mgy$　(y は鉛直上向きを正とする座標)

(2) $U(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$　($\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ は位置ベクトル)

[*1] スカラー関数とは，ベクトルやスカラーをスカラーに写像する関数のこと

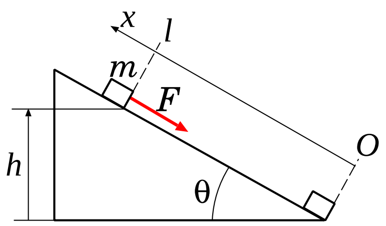
[*2] このポテンシャルの概念を発明したのはラグランジュ (Joseph-Louis Lagrange , 1736-1813) である。ただし，ポテンシャルという言葉を初めて用いたのはグリーン (George Green, 1793-1841, 英) である。ラグランジュは イタリアで生まれフランスで活躍した。オイラーと並び 1 8

5.7 力学的エネルギーと外力のする仕事

5.7.1 力学的エネルギーと外力のする仕事

[例題 5.7]

例題 5.4 において，図のように物体に斜面と平行下向きに力 F が働いていた場合を考えよう。



(1) 物体の運動方程式を書きなさい。

(2) 物体が距離 l だけすべり落ちた場合について，運動方程式を位置で積分することにより，力学的エネルギーの変化と力 F がした仕事の関係式を導きなさい。

(3) 物体ははじめ静止していたとする。斜面にそって l 落ちたときの速さを求めなさい。

[解説]

(1) 物体に働く力を図 5.13 に示す。物体の運動方程式は次式の通りである。

$$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - F \tag{5.47}$$

(2) 式 (5.47) の両辺を $x = l$ から $x = 0$ まで位置で積分すると次式を得ることができる。(式変形および記号の意味は例題 5.4 参照)

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + Fl. \tag{5.48}$$

上式を変形すると

$$\left(\frac{1}{2}mv_l^2 + mg\cdot 0\right) - \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh\right) = Fl. \tag{5.49}$$

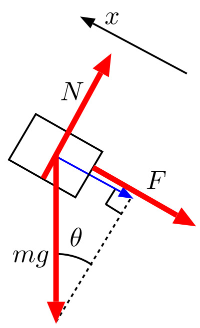


図 5.13

この式の左辺第一項と第二項はそれぞれ物体が斜面をすべった後と前の力学的エネルギーを示し，右辺は外力 F が物体にした仕事を示している。よって

力学的エネルギーの変化は外力が物体にした仕事に等しい

ことがわかる。

(3) $v_0 = 0$ であれば式 (5.48) より，

$$v = \sqrt{2\left(gh + \frac{Fl}{m}\right)} \quad \cdots(答)$$

この小問のように速度を求めることだけが目的の場合には運動方程式から計算しなくても，力学的エネルギーと仕事の関係式 (5.49) を出発点として求めてもよい。

5.7.2 ベクトルによる力学的エネルギーと仕事の議論 *

3 次元空間にある質量 m の質点が，重力等の保存力 $\boldsymbol{F_C}$ と外力 $\boldsymbol{F}$ をうけて $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}(t_1)$ から $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}(t_2)$ まで運動するとき，力学的エネルギーはどのように変化するかをより一般的に議論してみよう。

質点の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F_C} + \boldsymbol{F} \tag{5.50}$$

両辺を区間 $\boldsymbol{x}_1$ から $\boldsymbol{x}_2$ で位置により積分すると

$$\int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} m\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{dx} = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{F_C} \cdot \boldsymbol{dx} + \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dx} \tag{5.51}$$

保存力 $\boldsymbol{F_C}$ に対する位置エネルギーを U とおくと，上式より次式を得る。

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + U(\boldsymbol{x}_2) - \left\{\frac{1}{2}mv_1^2 + U(\boldsymbol{x}_1)\right\} = \int_{\boldsymbol{x}_1}^{\boldsymbol{x}_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dx} \tag{5.52}$$

ここで，$v_1 = |\dot{\boldsymbol{x}}(t_1)|$, $v_2 = |\dot{\boldsymbol{x}}(t_2)|$ であり，$U(\boldsymbol{x})$ は位置エネルギーを表す。この式から

力学的エネルギーの変化は外力 $\boldsymbol{F}$ が物体にした仕事に等しい

ことがわかる。また，

外力 $\boldsymbol{F}$ が存在しなければ，力学的エネルギーは保存する

こともわかる。

5.8 力学的エネルギーを減衰させる力

物体に**動摩擦**や**粘性抵抗**が働くとき物体の力学的エネルギーは減衰する。両手をこすりあわせたときに手の平が熱くなることからも想像できるように，**失われた力学的エネルギーは多くの場合熱エネルギーに変わる**[*]。しかし, **エネルギーの総量は常に一定である (エネルギー保存則)** 事が知られている。

[*] 熱エネルギーの正体については 6.2 節で触れる。

[例題 5.8] 質量 m の物体を摩擦のある水平な床の上で初速度 v_0 で滑らせたら，物体は距離 l 進んで止まった。物体と床の間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさは g とする。

(1) 物体と床面の間に働く摩擦力の大きさを F, 物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N とおいて，物体の運動方程式を書きなさい。

(2) F を m, μ を使って表しなさい。

(3) 物体の運動エネルギーの変化を F を使って表しなさい。

(4) l を v_0 を用いて表し，この値は物体の質量によらないことを確認しなさい。

(5) 雨の日に時速 72km で動いていた車が急ブレーキをかけたらその瞬間からタイヤはスリップし, やがて車は止まった。車がスリップしているとき、タイヤと濡れたアスファルトの間に働く動摩擦係数は約 $\mu = 0.5$ である。車がスリップをはじめてから止まるまでどの程度の距離すべったと考えられるだろうか。

[解説]

(1) 物体の進行方向に x 軸, 鉛直上向きに y 軸をとると，物体の運動方程式は以下で与えられる。

$$m\ddot{x} = -F \tag{5.53}$$
$$m\ddot{y} = N - mg \tag{5.54}$$

(2) 物体が床面を動く時には $\ddot{y} = 0$ なので，式 (5.54) より

$$N = mg \tag{5.55}$$

したがって物体に働く動摩擦は次式で与えられる。

$$F = \mu N = \mu mg \tag{5.56}$$

(3) 物体の運動エネルギーの変化が，物体が受けた仕事に等しいので，次式が成り立つ[*]。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m \times 0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= -Fl \\ -\frac{1}{2}mv_0^2 &= -Fl \end{aligned} \tag{5.57}$$

ここで，物体が l 進んだ時の速度が 0 であることを用いた。上式より運動エネルギーの変化 $-\frac{1}{2}mv_0^2$ が摩擦のした仕事 $-Fl$ に等しいことがわかる。

(4) 式 (5.56) を式 (5.57) に代入すると

$$l = \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{5.58}$$

よって，l は m によらない。言いかえると，摩擦のある面を滑っている物体が静止するまでに進む距離は質量によらず，初速度と摩擦係数だけで決まる。

(5) $v = 72$ km/h, $\mu = 0.5$, $g = 9.8$ m/s^2 として、車が停止するまでの距離 l を式

[*] 運動方程式 (5.53) の両辺を $x = 0$ より $x = l$ まで積分しても良い。

(5.58) より求めると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
l &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \\
&= \frac{(72\ \mathrm{km/h})^2}{2 \times 0.5 \times 9.8\ \mathrm{m/s^2}} \\
&= \frac{(72 \times 10^3\ \mathrm{m}/(3.6 \times 10^3\ \mathrm{s}))^2}{9.8\ \mathrm{m/s^2}} \\
&\simeq 40\ \mathrm{m} \quad \cdots (答)
\end{aligned}
$$

なお、ヒトが運転中に急ブレーキの必要性を感じてからブレーキを踏み, ブレーキが効き始めるまでは 1 秒弱の時間がかかるので, 急に止まろうと思っても上で計算した値より, より長く (20m 弱) 移動してしまうことになる。

[例題 5.9] 図のように質量 m の物体が摩擦のある水平な床の上の直線上を運動している。位置 x_1 から x_3 を経由して x_2 まで動いたとき ($x_1 < x_2 < x_3$)，この間に摩擦が物体にした仕事を求め，その仕事が始点と終点のみで決まらないこと，すなわち**摩擦力は保存力ではない**ことを示しなさい。物体と床の間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする。

[解説] 物体が床面から受ける垂直抗力は mg なので，物体が移動中に受ける摩擦力の大きさは μmg であり，向きは移動方向と逆である。すなわち摩擦力の向きは，位置 x_1 から x_3 に向かう時には x 軸の負の向きであり，x_3 から x_2 までの間は正の向きである。したがって，位置 x_1 から x_3 を経由して x_2 まで物体が動く間に摩擦が物体にする仕事 J は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
J &= \int_{x_1}^{x_2} (-\mu mg) \cdot dx + \int_{x_3}^{x_2} (\mu mg) \cdot dx && (5.59) \\
&= \mu mg(x_2 - x_1) + \mu mg(x_2 - x_3) && (5.60) \\
&= \mu(2x_2 - x_1 - x_3) && (5.61)
\end{aligned}
$$

これは始点 (x_1) と終点 (x_3) のみでは決まらない値なので，摩擦力は保存力ではないことがわかる。

第 6 章

力を及ぼしあう質点の運動

これまでは，ある質量をもつ点（質点）を解析の対象としてきた。しかし，目に見える物体は全て分子，原子といった微小な物質単位が相互作用を行いながら成り立っている。このような物質の集合体を扱うときにもこれまでと同じ議論ができるのだろうか。本章では力を及ぼしあう複数の質点の力学を扱う。

6.1　運動量の保存

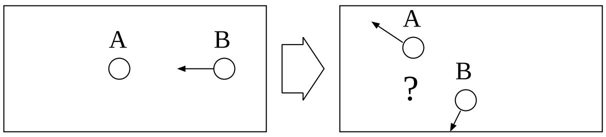


図 6.1

第 5 章で述べたようにデカルトは物体の運動に関して運動量に注目した研究を行っていた。そして，図 6.1 のように物体が衝突する前後で，運動量の総和が変化しないことを発見した[*]。すなわち，質量がそれぞれ m_A, m_B である 2 つの質点 A, B が衝突したとき，衝突前の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}_A^{pre}$, $\boldsymbol{v}_B^{pre}$，衝突後の速度を $\boldsymbol{v}_A^{post}$, $\boldsymbol{v}_B^{post}$ とおくと次式が成立する。

$$m_A\boldsymbol{v}_A^{pre} + m_B\boldsymbol{v}_B^{pre} = m_A\boldsymbol{v}_A^{post} + m_B\boldsymbol{v}_B^{post} \tag{6.1}$$

さらに一般的に書くと，質点 A,B が衝突等により互いに力を及ぼしあいながら動いており，それ以外に働く外力は無い場合には常に次式が成り立つ。

$$m_A\boldsymbol{v}_A(t) + m_B\boldsymbol{v}_B(t) = \boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{C}\text{:定数ベクトル}) \tag{6.2}$$

この発見を，ニュートンの運動方程式から導いてみよう。

[*] デカルト (p.61) の述べた運動量の保存とは，運動量の大きさが変わらないことを主張したものであった。よって本節で述べるように運動の向きまで考慮したものではなかった点で，少し誤ったものであった。方向も考慮したベクトルとしての運動量保存を提唱したのはホイヘンス (p.15) である。

[例題 6.1] 図 6.1 のように，質量が m_A, m_B である 2 つの質点 A, B が衝突するとき，衝突前後の運動の変化がどのようになるかを考えてみよう。質点 A, B の位置を $\boldsymbol{x}_A(t)$, $\boldsymbol{x}_B(t)$，速度を $\boldsymbol{v}_A(t)$, $\boldsymbol{v}_B(t)$，衝突の際に 2 つの質点が接触した時間を Δt，その時質点 A が B から受ける力を $\boldsymbol{F}(t)$ とおく。

(1) 各質点の運動方程式を書きなさい。

(2) 衝突の前後において**常に運動量の総量が保存**していること，すなわち式 (6.1)(6.2) が成立することを証明しなさい。

[解説] **(1)** 質点 A, B の運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} m_A\ddot{\boldsymbol{x}}_A(t) &= \boldsymbol{F}(t) \\ m_B\ddot{\boldsymbol{x}}_B(t) &= -\boldsymbol{F}(t) \end{cases} \tag{6.3}$$

ここで，衝突中は $\boldsymbol{F}(t) \neq 0$ であるが，それ以外のときには $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ である。

(2) 2 つの質点の運動方程式 (6.3) の両辺をそれぞれ足し合わせると次式を得る。

$$m_A\ddot{\boldsymbol{x}}_A(t) + m_B\ddot{\boldsymbol{x}}_B(t) = 0$$

上式を変形すると

$$\frac{d}{dt}(m_A\boldsymbol{v}_A(t) + m_B\boldsymbol{v}_B(t)) = 0 \tag{6.4}$$

となり、**運動量の総和が時間により変化しない**ことを示す。さらに時間で積分すると式 (6.2) が得られる。

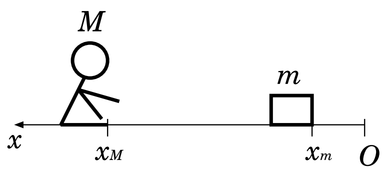
$$m_A\boldsymbol{v}_A(t) + m_B\boldsymbol{v}_B(t) = \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C}: \text{定数ベクトル}) \tag{6.5}$$

この式は任意の時刻の運動量が一定であることを示すので，質点の衝突前後の運動量に注目すれば式 (6.1) が得られる。

■

2 つの物質が衝突することなく，地球と月のように万有引力で引きつけあう場合にも運動方程式は式 (6.3) のように書くことができる。すなわち外力が働かない 2 つの物質の運動量の総和は常に一定になることがわかる。

[例題 6.2] つるつるすべる氷の上に静かに座っていた一郎くん (質量 M) が，氷上を速度 v で滑ってきた物体 (質量 m) を受け止めたところ，一郎くんは物体を抱えたまま滑り出した。



(1) 物体を受け止めた後の一郎くんの速度 V を M, m, v を用いて表しなさい。

(2) 一郎くんが物体を受け止める前後で，一郎くんと物体の力学的エネルギーの総量は変化しただろうか? 変化したならなぜだろうか。

[解説]

(1) 一郎くんが物体を受け止める前後で運動量は変化しないので，次式が成立する。

$$M \cdot 0 + mv = (M+m)V \tag{6.6}$$

よって一郎くんが物体を受け止めた後の速度は次式になる。

$$V = \frac{m}{M+m}v \quad \cdots(答) \tag{6.7}$$

この式から以下のようなことがわかる。

(1) 速度 V は正なので，一郎くんが物体を受け止めた後に滑っていく方向は座標軸の正の向き，すなわち物体が滑ってきた速度と同じ方向である。
(2) 滑ってきた物体が一郎くんに比べて非常に軽かったら ($m \ll M$)，一郎くんの速度もとても小さくなる。
(3) 滑ってきた物体が一郎くんに比べて非常に重かったら ($m \gg M$)，一郎くんは物体が滑ってきた速度 v とほぼ同じ速度で滑っていく。

このような結果が，実際の現象と同じであるかよく想像してみること。
(2) 一郎くんが物体を受け止める前後の力学的エネルギーの変化は以下の通り。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M+m)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= -\frac{1}{2}\frac{mM}{M+m}v^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

よって，力学的エネルギーは衝突により減少していることがわかる。このように衝突前後で力学的エネルギーが保存しない衝突を**非完全弾性衝突** (inelastic collision) とよぶ。失われた力学的エネルギーは物体の衝突時の熱エネルギーとして散逸する。一方，運動エネルギーの総量が保存する衝突は**完全弾性衝突** (elastic collision) とよぶ。

[例題 6.3] 一直線の溝の上の 2 つの球 A, B がある。はじめ球 B は静止しており，そこに速度 v で球 A が衝突した。その後の球 A,B の運動はどのようになるか? 衝突において運動エネルギーは完全に保存 (完全弾性衝突) するとし，球 A,B の質量をそれぞれ m_A, m_B として議論しなさい。球の回転運動や摩擦は無視できるとする。

[解説] 衝突後の球 A,B の速度をそれぞれ v_A, v_B とおく。衝突の前後において運動量は変化しないので次式が成り立つ.

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \tag{6.9}$$

また，題意より衝突前後の運動エネルギーは同じなので次式が成り立つ.

$$\frac{1}{2}m_A v^2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2. \tag{6.10}$$

式 (6.9) より，

$$v_A = v - \frac{m_B}{m_A}v_B$$

を式 (6.10) に代入して v_A を求め，さらにそれを式 (6.9) に代入して v_B を求めると以下の 2 つの解を得ることができる。

$$\begin{cases} v_A &= v \\ v_B &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_A &= \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v \\ v_B &= \dfrac{2m_A}{m_A + m_B} v \end{cases}$$

ここで，上の第 1 式は球が衝突しなかった場合の速度である．よって，衝突した後の速度は上の第二式で与えられる。· · · (答)

ここで，もし $m_A = m_B$ であったとすると

$$\begin{cases} v_A &= 0 \\ v_B &= v \end{cases}$$

となるので，ちょうどぶつかってきた球 A の速度がそのまま球 B の速度になり，球 A は静止することがわかる。

[例題 **6.4**] ビリヤード台の上に質量 m の 2 つの球がある。はじめ球 B は静止しており，そこに速度 $\boldsymbol{v}$ で球 A が衝突した。その後球 A は，衝突前の進行方向に対して 30° の角度の方へ転がっていった。衝突後の球 A,B の速度を求めなさい。衝突において運動エネルギーは完全に保存する（完全弾性衝突）とし，また球の回転運動や摩擦は無視して議論しなさい。

[解説]

図 6.2 のように，衝突前の球 A の進行方向に x 軸をとり，衝突後の球 A の転がった方向が y 軸の正の領域になるように y 軸をとる。

衝突後の球 A,B の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ とおく。題意より衝突前後の運動エネルギーは同じなので，

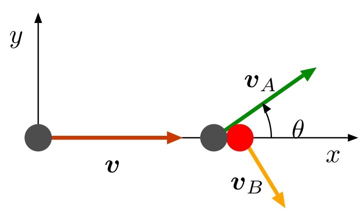


図 6.2

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2, \tag{6.11}$$

ここで, $v_A = |\boldsymbol{v}_A|$, $v_B = |\boldsymbol{v}_B|$ である。上式を変形すると次式を得る。

$$v^2 = v_A^2 + v_B^2 \tag{6.12}$$

衝突の前後においては各軸方向の運動量は変化しないので次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{v} &= m\boldsymbol{v}_A + m\boldsymbol{v}_B \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_B \end{aligned} \tag{6.13}$$

ここで，$\boldsymbol{v} = (v, 0)$ である。上式は，衝突後の 2 つの速度ベクトル $\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ の和が，衝突前の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ と等しいことを意味する (図 6.3)。

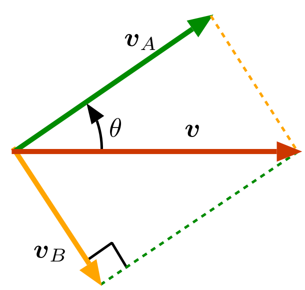


図 6.3

また，題意より $\boldsymbol{v}_A$ は以下のように書くことができる。

$$\boldsymbol{v}_A = (v_A \cos 30°, v_A \sin 30°) = (\frac{\sqrt{3}}{2}v_A, \frac{1}{2}v_A) \tag{6.14}$$

以下では 2 種類の解法で衝突後の球の速度を求める。

[**解法 1**] 式 (6.13) より

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A \tag{6.15}$$

に式 (6.14) を代入すると，

$$\boldsymbol{v}_B = (v - \frac{\sqrt{3}}{2}v_A, -\frac{1}{2}v_A) \tag{6.16}$$

これを式 (6.12) に代入して v_A を求めると次の 2 つの解を得る。

$$v_A = 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}v \tag{6.17}$$

これを式 (6.14), (6.16) に代入して $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ を求めると次の 2 つの解を得る。

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_A & = (0,0) \\ \boldsymbol{v}_B & = (v,0) \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{v}_A & = \left(\frac{3}{4}v, \frac{\sqrt{3}}{4}v\right) \\ \boldsymbol{v}_B & = \left(\frac{1}{4}v, -\frac{\sqrt{3}}{4}v\right) \end{cases}$$

ここで，上の第 1 式は衝突が一直線上で起こったときの運動を表していることがわかる。よって衝突後の球の運動は上式の第 2 式で表される。$\cdots$(答)

[**解法 2**] 式 (6.13) より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{v}_B &= (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A) \\ v^2 &= v_A^2 + v_B^2 + 2\boldsymbol{v_A} \cdot \boldsymbol{v_B} \end{aligned} \tag{6.18}$$

ここで式 (6.12) を代入すると次式を得る。

$$\boldsymbol{v_A} \cdot \boldsymbol{v_B} = 0 \tag{6.19}$$

よって 2 つの速度ベクトル $\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ は直交することがわかる[*](図 6.3)。そこで，$\boldsymbol{v}_B$ を $\boldsymbol{v}_A$(式 (6.14)) と直交するベクトル

$$\boldsymbol{v}_B = (\frac{1}{2}v_B, -\frac{\sqrt{3}}{2}v_B) \tag{6.20}$$

とおき，これと式 (6.14) を式 (6.13) に代入すると次式が得られる。

$$v_A = \sqrt{3}v_B \tag{6.21}$$

ここで $v_A > 0$ なので (式 (6.14) による)，上式より $v_B > 0$ であることがわかる。上式と式 (6.14),(6.20) を式 (6.12) を代入すると $v_B = v/2$ を得る。これを式 (6.20) に代入すると衝突後の球の速度 $\boldsymbol{v}_B$ を得ることができる。

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_A & = (\frac{3}{4}v, \frac{\sqrt{3}}{4}v) \\ \boldsymbol{v}_B & = (\frac{1}{4}v, -\frac{\sqrt{3}}{4}v) \end{cases} \quad \cdots(答)$$

[*]$\boldsymbol{v}_A$ と $\boldsymbol{v}_B$ は直交することは，式 (6.12) が三平方の定理をみたすことから気づくこともできる。

以上では 2 個の質点の衝突について扱ったが，N 個の質点についてもまったく同様にして衝突前後で運動量が保存することを証明できる。すなわち，相互作用しあう N 個の質点の質量をそれぞれ $m_1, m_2, \ldots, m_N$，速度を $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_N}$ とする。この N 個の質点系に外力が働かないならば次式が常に成り立つ。

$$m_1\boldsymbol{v_1} + m_2\boldsymbol{v_2} + \cdots m_N\boldsymbol{v_N} = \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C}\text{:定ベクトル})$$

このように外力を受けずに相互作用し合って運動する物体の運動量の総和が保存することを**運動量保存の法則**という。

練習問題 6.1

(1) ボールを地面に落としたら，ボールが跳ね返ってきた。この場合には運動量保存の法則は成立するだろうか？
(2) 粘土の塊を地面に落としたら，地面につぶれて張りついた。この場合には運動量保存の法則は成立するだろうか？

6.2 気体の温度とエネルギー保存則

化学的に安定な気体は，**完全弾性衝突**をする気体分子が多数空中を飛んでいる状態とみなすことができる。そして，**気体の温度は構成分子の運動エネルギーの平均値に比例**する量である。一般に，物質を構成する分子の**運動エネルギーの総量がその物質のもつ熱エネルギー**であり，**絶対零度**[*] において運動エネルギーは 0, すなわち完全に分子が静止した状態になる。物体が運動するとき，その力学的エネルギーは衝突や摩擦などによって**熱エネルギー**にしばしば変化するが，これは分子運動の力学的エネルギーに変わったのだと理解すれば，力学的エネルギーの総量は変化してないことがわかる。

図 6.4 ガリレオ式温度計。ガラス円柱内に液体を入れ，さらのその液体と比重が少しだけ違う球状のおもりをいくつか入れてある。温度により円柱内の液体の比重が変化すると，浮いているおもりの個数が変化することにより温度がわかる。(Wikipedia(en):Galileo Thermometer より)

温度を定量的に測ることができる**温度計**は 1592 年にガリレイが発明した[†]。しかし，ガリレイの温度計は気体の体積が温度により変わることを利用するため，気圧の変化にも反応してしまうのが欠点だった。その後物理学者**ファーレンハイト**[‡] は 1714 年頃に水銀温度計をつくり，水の氷点や沸点を越えた温度の測定を可能にした。ファーレンハイトとほぼ同時代の物理学者**ベルヌーイ**[§] は 1738 年に「流体力学」を出版し，気体は激しく運動する多数の粒子からなるとする仮説によって気体の圧力と体積の関係 (ボイルの法

[*] 摂氏-273.15 度

[†] ガリレオの友人の発明とする説もある。

[‡] ファーレンハイト (Daniel Fahrenheit, 1686-1736) はドイツ人だが主にオランダで活躍。温度目盛の華氏度はファーレンハイトの提案によるもので，その名称はファーレンハイトの中国語名「華倫海」による。

[§] Daniel Bernouli, 1700-1782, スイス

則[¶]) を説明できることを示した。さらにスコットランドの物理学者**マクスウェル**[*1] は気体を衝突し合う分子集団として記述し，その運動エネルギーの平均値と温度の関係式を表すマクスウェル分布を 1860 年に発表した。すなわちこれにより温度と気体分子の運動エネルギーの関係が明確に示された。

[¶] ボイル (Robert Boyle, 1627-1691) は，温度一定の気体の体積が圧力に反比例することを発見し，1662 年に発表した。

一方，マクスウェルによる気体の分子運動の研究より少し前の 1843 年にイギリスの**ジュール**[*] は水のもつ熱エネルギー[†] と力学的エネルギーが等価なものであることを美しい実験によって示していた。ジュールは分銅の落下によって水をかきまぜる装置をつくり (図 6.5)，分銅のした仕事と水の温度変化の間に単純な比例関係があることを発見した。これにより，失われたように見える力学的エネルギーは熱エネルギーに変換されていて，エネルギーの総量が一定であるという**エネルギー保存則**の概念を導いた。

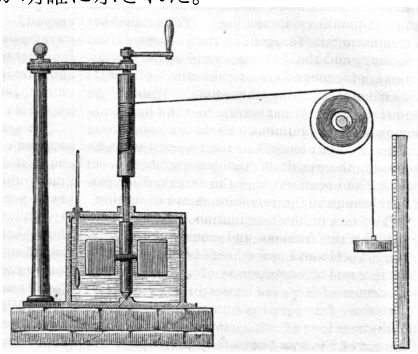


図 6.5 ジュールによるエネルギーに関する実験。落下する物体によって水をかき混ぜると落下距離に比例して水温が上がることを示した。(Wikipedia(en):Joule's Apparatus (Harper's Scan) より)

[*] ジュール (Japmes Prescott Joule , 1818-1889, 英) は裕福な醸造業者の子であり，ジュール自身も醸造業を続けながらいわば自宅での趣味として研究を続けた。電流により発生する熱量 (ジュール熱) が抵抗の二乗に比例するなど，熱量に関する多くの業績があり，熱力学分野における最も重要な物理学者の一人と言われている。ただし，ジュールによるエネルギー保存の研究は，発表当初はほとんど評価されなかった。キャベンディッシュ (p.31) といい，グリーン (p.80) といい，ジュールといい，イギリスでは本業か趣味かは関係なく，地道にしかし素晴らしい仕事をする人が多いように感じられる。

[†] 熱エネルギーはある物体がもつ分子運動の力学的エネルギーの総量を意味し，温度は分子運動の力学的エネルギーの分布の仕方を意味する。氷は融点 (0° において熱を吸収して水になるように，熱エネルギーと温度は異なるものである。

ジュールより 1 年早くドイツの物理学者であり生理学者である**メイヤー**[‡] もエネルギー保存則を発表している。メイヤーは船の外科医として西インド諸島に航海中，診断した患者の血液が鮮やかな赤だったことから，体の代謝により発熱をしていることに気づいた。メイヤーはこれにより化学反応が生物の活動源であることを発見し，また，力と熱のエネルギーの総和が一定であるとするエネルギー保存則を提唱した。メイヤーとジュールは独立にエネルギー保存則に気づいたが，その後メイヤーはジュールに対して自分がエネルギー保存の発見者であることを主張し，一方でジュールはメイヤーが十分な実験を行っていないことを根拠に自分が発見者であると主張して，互いに長い間無視し合う状況が続いた。メイヤーは，自分が十分な評価を受けることができないままジュールの方がエネルギー保存の発見者として有名になったことに非常に傷つき，精神的にも不安定になったらしい。

[‡] Julius Robert von Mayer, 1814-1878

ドイツの物理学者であり生物学者である**ヘルムホルツ**[§] も，筋活動が生命力のようなものによるものではないことを示す実験を行っている時にエネルギー保存則を発見し，力，熱，光，電磁気のエネルギーの総和が保存することを述べた論文を 1847 年に発表している。ただし，ヘルムホルツがこのように様々なエネルギー形態に対するエネルギー保存則に気づくきっかけの 1 つはジュールの実験だったらしく，発表論文にもジュールの論文を引用している。またその後，メイヤーの業績も同等に評価している。

[§] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz ,1821-1894

[*1] マクスウェル (James Clerk Maxwell,1831-1879) は電磁場の性質を統一的に説明するマクスウェルの方程式の導出，気体分子運動論，統計力学等の分野で多くの業績を残し，その業績はニュートン以来もっとも優れた物であるとアインシュタインに評された。カラー写真の発明者でもある。晩年はケンブリッジ大学のキャベンディッシュ研究所の初代所長を務め，それまであまり知られていなかったキャベンディッシュ (p.31) の業績の発掘整理に尽力した。

温度もしくは熱エネルギーと力学的エネルギーの関係は，これまでに述べたように気体と液体についてやや独立に行われてきたが，両者をともに分子運動に基づいて統一的に捉えることができることを示したのは**ファン・デル・ワールス**[¶] である。ファン・デル・ワールスはこの業績により 1910 年にノーベル物理学賞を受賞した。

[¶] ファン・デル・ワールス (Johannes Diderik van der Waals , 1837-1923, 蘭) はほぼ独学で科学の勉強をし，中学校の先生をしながらライデン大学に聴講に通った。その後大学に入学し 1873 年に博士論文「液体と気体の連続性について」を提出した。

分子運動の理解をすすめるきっかけとなった有名な実験にはイギリスの植物学者**ブラウン**[*] が花粉の壊れた破片が水中でランダムに動きまわる様子を詳細に記録したいわゆる**ブラウン運動** (Brownian motion) の発見 (1827) もある。この謎の運動は，水を構成する微小粒子の集団の衝突によるのではないかという仮説が化学者**スヴェドベリ**[†] により発表されたのは実に 1902 年になってからであった。この考えに基づき，その 3 年後 (1905) にブラウン運動の理論的説明を試み，ブラウン運動の解析により分子の大きさや速さを決定できると考えたのが**アインシュタイン**であり，これは分子の力学的運動と温度の関係を結び付ける理論でもあった。この 1905 年は，アインシュタインがこのブラウン運動に関する論文の他に，**特殊相対論**と，ノーベル賞受賞の対象になった「光は粒子である」とする**光電効果**に関する論文を発表した所謂**奇跡の年**である[‡]。

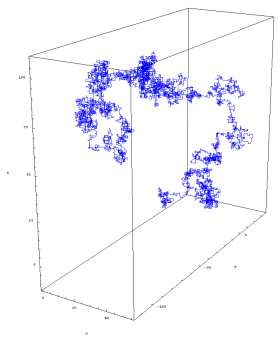


図 6.6 ブラウン運動による粒子の運動の例. (Zweistein 2006, Wikimedia Commons より)

[*]Robert Brown，1773-1858, 英

[†]Theodor Svedberg, 1884-1971, スウェーデン, 1926 年にノーベル化学賞を受賞

[‡] 1900 年に大学を卒業したアインシュタインは 1905 年当時特許庁で働きながら研究を続けていた。

[問 6.1] 温度が分子運動の運動エネルギーの平均値に比例する量ならば，風がふいても暑いと感じないのはなぜだろう？ 気体の**並進運動**における速さの平均値を $\bar{v}$ とおくと，運動エネルギーの平均値は $\dfrac{1}{2}m\bar{v}^2$ となる。この運動エネルギーの平均値と温度 T には次の関係があることが知られている。

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT$$

ここで，$k = 1.3807 \times\ 10^{-23}$ [J/K] はボルツマン係数である。気体分子が 1 mol [§] であるならば，上式の両辺にアボガドロ定数 N_A *2 をかけることによって次式を得る。

$$\frac{1}{2}N_A m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}RT$$

ここで，$R = kN_A = 8.31447$ [JK^{-1}mol^{-1}] は気体定数である。窒素分子が摂氏 27 C° ≃ 300 K [¶] のとき，その平均速度はどの程度になるかを求め，台風の時の瞬間風速とどの程度違うかを調べなさい。窒素分子が N_A 個あるときその質量は約 14 g である。

[§] ある物体にその構成要素 (原子，分子など) が 0.012 kg の炭素 12 の中に存在する原子数と等しい数あるとき，その量を 1 モル (mol) とよぶ。SI 単位系の基本単位の一つ。

[¶] 気体の温度を表す単位**ケルビン** [K] は，全ての分子運動が停止する絶対零度が 0 ケルビン，水の三重点 (摂氏 0.01C°) が 273.16 ケルビンである。「ケルビン」は「温度は物体のエネルギー量を表す」と考えたイギリスの物理学者ウィリアム・トムソン (William Thomson, 1824-1907) が男爵になった時の名称ケルヴィン卿にちなんでつけられた名前。

*2 **アボガドロ定数**は 1mol の物質中にある粒子数，すなわち 0.012kg の炭素 12 の中に存在する原子数と等しい。「アボガドロ定数」とはイタリアの物理学者**アヴォガドロ** (Avogadro, Lorenzo Romano Amedeo Carlo, 1776-1856, 伊) にちなんだ名前である。アヴォガドロの時代には，気体を構成する粒子は原子であるとされていたが，アヴォガドロは，原子が結合した分子が基本粒子であると初めて主張し，さらに同一の体積，温度，圧力下の気体には同じ数の分子があるというアボガドロの法則を 1811 年に発表した

6.3　2 つの質点の重心

例えば，惑星とその衛星が太陽の回りをどのように回っているかを考えるときには，惑星とその衛星の運動をそれぞれ議論するよりも，まとめてひとつの物体とみなすことができれば解析が簡単になりそうである。本節では複数の物体を 1 つの物体とみなして議論する方法を考える。

質点 A と質点 B が互いに力を及ぼしあいながら運動しており，さらに質点 A と質点 B にはそれぞれ外力 $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ がはたらいている (図 6.7)。質点 A と質点 B の位置をそれぞれ $\boldsymbol{x_A}$, $\boldsymbol{x_B}$，質点 A が質点 B から受ける力を $\boldsymbol{f}$ と書くと，各質点の運動方程式は以下の通りになる。

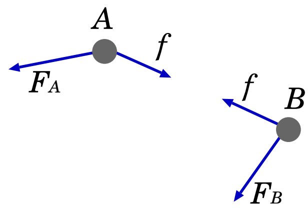


図 6.7

$$\begin{cases} m_A\ddot{\boldsymbol{x}}_A &= \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{f} \\ m_B\ddot{\boldsymbol{x}}_B &= \boldsymbol{F}_B - \boldsymbol{f} \end{cases} \tag{6.22}$$

上の二式の両辺をそれぞれ足し算すれば次式になる。

$$m_A\ddot{\boldsymbol{x}}_A + m_B\ddot{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B \tag{6.23}$$

質点 A と B をまとめてひとつの物体だとみなしてその運動を解析するために，上式を次のように書く方法を考えよう。

$$(m_A + m_B)\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B \tag{6.24}$$

A と B をまとめた位置 $\boldsymbol{X}$ は，各物体の位置 $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$ に対してどこに注目して定義するのがよいだろうか？ 式 (6.23) と (6.24) の左辺を比較すると，

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_A\boldsymbol{x}_A + m_B\boldsymbol{x}_B}{m_A + m_B} \tag{6.25}$$

とおけば両者が等しくなることがすぐわかる。上式で与えられる位置 $\boldsymbol{X}$ を質点 A と B の**質量中心** (center of mass)，もしくは**重心** (center of gravity) とよぶ。この重心 X と物体の質量の和 $M \equiv m_A + m_B$ を用いると式 (6.24) は次のようになる。

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B \tag{6.26}$$

このように，力を及ぼしあう 2 つの質点の運動は，**重心**に注目すれば一つの質点の運動として，これまでと同様に扱うことができる。もし，2 つの質点に外力が働かないとするなら（$\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{F}_B = \boldsymbol{0}$），

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = 0.$$

すなわち重心は等速度運動を続ける。この時上式を積分すると

$$M\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は定ベクトル})$$

なので，重心の運動量は一定である。

[例題 **6.5**] 2 つの質点 A, B の質量がいずれも m_A, m_B であり，その位置をそれぞれ $\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B$ で表す。

(1) 2 つの質点の質量が等しい $(m_A = m_B)$ ときの重心位置を計算しなさい。

(2) 質点 A の質量が B の質量に比べて十分に大きい $(m_A \gg m_B)$ ときの重心位置を答えなさい。

[解説] (1) $m_A = m_B \equiv m$ とおくと，2 つの質点の重心位置 $\boldsymbol{X}$ は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{X} = \frac{m\boldsymbol{x}_A + m\boldsymbol{x}_B}{m+m} = \frac{\boldsymbol{x}_A + \boldsymbol{x}_B}{2}$$

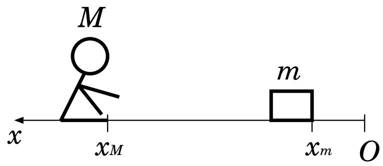
したがって，X は 2 つの物体の位置の中点になる。
(2) $m_A \gg m_B$ より，$\frac{m_B}{m_A} \simeq 0$ と近似すると，重心位置は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X} &= \frac{m_A\boldsymbol{x}_A + m_B\boldsymbol{x}_B}{m_A + m_B} \\ &= \frac{\boldsymbol{x}_A + \frac{m_B}{m_A}\boldsymbol{x}_B}{1 + \frac{m_B}{m_A}} \\ &\simeq \boldsymbol{x}_A\end{aligned}$$

すなわち，重心位置 X は物体 A の位置になる。

■

[例題 **6.6**] 例題 6.2 と同様に，質量 m の物体を氷の上で受け止めた一郎くんの速度を，重心位置に注目して解いてみよう。



(1) 一郎くんと物体の位置をそれぞれ x_M, x_m と表す。一郎くんと物体をあわせた重心の位置 X を書きなさい。

(2) 一郎くんが物体を受け止める前後の重心の速度を M, m, v を用いてそれぞれ表しなさい。

[解説]

(1) 一郎くんと物体をあわせた重心の位置 X は，式 (6.25) より次式で表される。

$$X = \frac{Mx_M + mx_m}{M+m} \tag{6.27}$$

(2) 重心の速度は式 (6.27) の時間微分により求めることができる。

$$\dot{X} = \frac{M\dot{x}_M + m\dot{x}_m}{M+m} \tag{6.28}$$

題意より，はじめ一郎くんは静止しており $\dot{x}_m = v$ であったことから重心の速度は次式で得られる。

$$\dot{X} = \frac{m}{M+m}v \tag{6.29}$$

一郎くんが物体を受け止める前後で重心の速度は変わらないので，その値は常に上式で与えられる。この値は例題 6.2 で求めた値と同じであることを確認せよ。

6.4 質点の集団および剛体の重心

より一般的に，力を互いに及ぼしあう N 個の質点の運動を考えよう。それぞれの位置を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ で表すとき，その重心は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{x}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{x}_i}{M}$$

ここで，

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{6.30}$$

である。さらに，各質点が外力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots$ を受けているとき重心の運動方程式は次式で与えられる。

$$M\ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \tag{6.31}$$

すなわち，外力を受けながら運動する質点の集合体の**並進運動**[*] は，その重心が外力を受けるとみなして考えれば，これまでどおりニュートンの運動方程式を適用できる。また，重心の並進運動に関しては，外力が物体のどこに働いているかは無関係に決まる。したがって**剛体** (rigid body) [†] も質点の集合体であると考えれば，重心に注目すればニュートンの運動方程式をそのまま適用することができる。

本テキストのここまでの議論は，力を受けている物体の大きさのことにふれないで議論してきた。本節の結果は，物体が質点であろうが星であろうが，いびつな形の剛体であろうが，ぶよぶよした物体であろうがその重心の運動は同じように扱えることを示す大変重要な発見である。ただし，質点の集合体や剛体などの**大きさのあるもの**の運動解析では，**並進運動**のみならず**回転運動**も考慮する必要がある。回転運動については 7 章で述べる。

[**問 6.2**] 式 (6.31) を証明しなさい。

[*] ある物体もしくは物体の集合体の重心の運動。**回転運動**の対語。大きさのある物体や物体の集合体の運動は重心の運動（並進運動）と重心まわりの回転運動に分けて議論することができる。

[†] **剛体**とは大きさがあり変形しない物体のこと

第 7 章

円運動

7.1　角度の単位と極座標系

7.1.1　弧度法と度数法

半径 1 の円において，長さが 1 である弧を見込む中心角を 1 **ラジアン** (radian[*]，単位表記としては [rad] と書く) として角度を表す方法を**弧度法**という。**ラジアンは半径に対する弧長の比**を表すので**無次元の実数**であるが，ラジアンという単位をつけることで角度を表すことを示している。

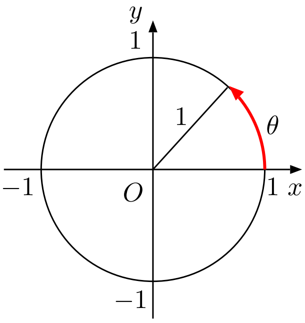


図 7.1　弧度法

[*] ラジアン (radian) は半径を表す語 radius と同じ語源。

角度を表す別の方法として，円の中心を通る直線で均等に円周を 360 分割してできる扇型の中心角を 1 度 (1° もしくは 1[deg] と書く) として角度を表す**度数法**があるが，物理では国際単位系 (SI 単位系) で角度の単位として定められているラジアンを使う。

[問 7.1]　角度 θ の値が度数法により θ [deg] が与えられたとき，弧度法による値 θ [rad] に変換するための式を述べよ (答 1 。

7.1.2　極座標系

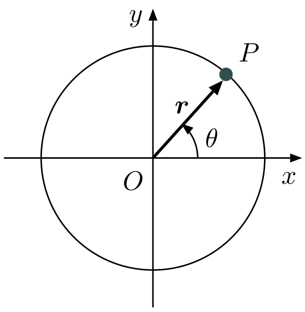


図 7.2　極座標系

ある物体 P の位置 $\boldsymbol{r}$ を示すには直交座標を必ずしも用いる必要はない。二次元空間内の位置であれば原点 O からの距離 $\overline{OP} = |\boldsymbol{r}|$ と，原点から始まる基準線と OP のなす角 θ で示すこともできる。xy 平面と重ねて表示する時には x 軸の正の向きを基準線とし，基準線から反時計回りを正として角度を示す。　このような座標系を**極座標系** (polar coordinate system) とよぶ。回転運動を扱う時は極座標系を用いると便利なことが多い。角度 θ にも直交座標軸と同様に**正負を決める向き**があることに注意し，**角度を定義するときには必ず正の向きを明示すること。**

(答 1 θ [rad]$= \frac{2\pi}{360^\circ}\theta^\circ$

ある物体が原点から一定の距離 r の位置を動くとき，この物体は半径 r の円軌道を描く。そこで，原点から物体までの距離を動く半径と捉えて**動径** (radius) とよぶ。より一般的に物体が円軌道を描かないときにも，原点から物体までの距離 r をしばしば動径とよび，物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を**動径ベクトル**とよぶ。ある物体の位置を極座標表現 (r, θ) と直交座標表現 (x, y) で表したとき，その関係式は以下の通りになる。

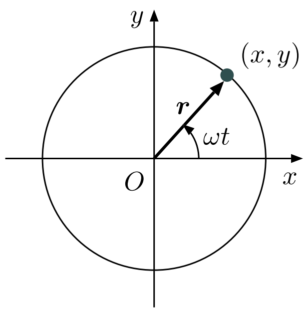
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

また，ある物体の運動を極座標表現で表したとき，角度 θ の時間微分 $\dot{\theta}$ を**角速度**，2 階微分 $\ddot{\theta}$ を**角加速度**という。

7.2 等速円運動と向心力

3.5.2 節で述べたように，月と地球の間に万有引力が働いているために月は遠くに飛んでいかずに地球にの周りを回っている。このように物体間に力が働くと，物体の運動が円軌道や楕円軌道になる場合がある。本節では，物体に働く力がどのような条件を満たすときにその軌道が円軌道を描くかを考えてみよう。

[例題 7.1] 図のように 2 次元空間内を質量 m の物体が半径 r，角速度 ω の等速円運動をしている。円運動の中心を原点とし，時刻 $t = 0$ の物体の位置が x 軸上に，そして物体の運動が xy 平面で反時計回りになるように xy 座標をとると，物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は以下のように書くことができる。



$$\boldsymbol{r} = (x, y) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t) \tag{7.1}$$

(1) 物体の運動の周期 T を，ω を用いて表しなさい。

(2) 物体の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ の向きと大きさを求めなさい。

(3) 物体の加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ の向きと大きさを求めなさい。大きさ $a = |\ddot{\boldsymbol{r}}|$ は以下の 2 通りの書き方で表しなさい。
  (a) 角速度 ω を用いる。
  (b) 速さ v を用いる。

(4) 物体が円運動をしているならば，その物体にはなんらかの力 $\boldsymbol{F}$ が働いている。その力 $\boldsymbol{F}$ の向きと大きさを前問で求めた加速度をもとに求めなさい。大きさは以下の 2 通りの書き方で表しなさい。
  (a) 角速度 ω を用いる。
  (b) 速さ v を用いる。

(5) 物体が等速円運動している時，前問で求めた力 $\boldsymbol{F}$ は物体に対して仕事をしない。その理由を説明しなさい。

(6) 円運動においては等速円運動に限らず，物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$ は直交する。このことを証明しなさい。

[解説]

(1) 式 (7.1) において，ωt の値が 0 から 2π まで変化するのに要する時間が，物体の運動周期 T である。したがって，T は以下のように与えられる。

$$\omega T = 2\pi$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

(2) 式 (7.1) を時間微分すれば速度 $\boldsymbol{v}$ を得ることができる。

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t) \tag{7.2}$$

よって，物体の速さ (速度の大きさ) は

$$v = |\dot{\boldsymbol{v}}| = r\omega$$

である。また，

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7.3}$$

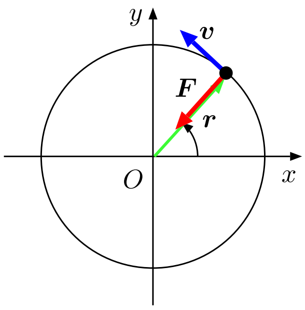


図 7.3

なので，速度は物体の位置ベクトルと直交する向き，すなわち円運動の軌道に対して接線方向であることがわかる (図 7.3)。

(3) 式 (7.2) を時間微分すれば加速度を得ることができる。

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{v}} \\ &= (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t) \\ &= -\omega^2 \boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{7.4}$$

よって加速度の向きは物体の位置ベクトルと逆方向，すなわち中心に向かう方向であり，その大きさは次式の通りである。

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}| = r\omega^2 \tag{7.5}$$

この円運動をする物体の加速度を**向心加速度**という。上式に式 (7.2) を代入すると，次式のように向心加速度の大きさを速さ v を用いて表すことができる。

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}| = r\left(\frac{\omega}{r}\right)^2 \tag{7.6}$$

(4) 式 (7.4) の両辺に m をかけると次式を得る。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -m\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{7.7}$$

この式は質点に対するニュートンの運動方程式の形になっている。そしてこの式の右辺より，物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ が向心加速度と同様に円軌道の中心に向かう方向であり (図 7.3)，その大きさは

$$|\boldsymbol{F}| = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r} \tag{7.8}$$

であることがわかる。この**円運動を起こす力**を**向心力** (centripetal force) と呼ぶ。

バケツをもってぐるぐると振り回すとき，バケツが飛んで行かないのは，手がバケツが飛んで行かないように引っ張っているからである。月が飛んで行かずに地球のまわりをまわっているのは，月と地球が互いに万有引力の力で引き付けあっているからである。このように円運動には向心力となる力が必ず存在する。

(5) 前問の結果より，物体が等速円運動を行うとき，物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ は円軌道の中心方向の力なので物体の運動の方向 (円軌道の接線方向) と直交する。定量的に示すと，式 (7.4) と (7.3) より次式が成立する。

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = -m\omega^2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{7.9}$$

よって，$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することがわかる。すなわち，等速円運動において物体が向心力 $\boldsymbol{F}$ よりうける仕事は 0 となることから，物体の運動エネルギーは変化しないことがわかる。

(6) 原点を中心とする半径 r の円軌道を描く物体の位置は，一般に次式のように書くことができる。

$$\boldsymbol{r} = (r\cos\theta(t),\ \sin\theta(t)) \tag{7.10}$$

その速度は次式で与えられる。

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (-r\dot{\theta}\sin\theta,\ \dot{\theta}\cos\theta) \tag{7.11}$$

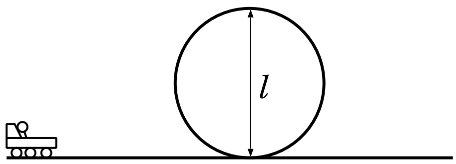
位置ベクトルと速度ベクトルの内積を取ると

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = (r\cos\theta, \sin\theta)\cdot(-r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{\theta}\cos\theta) = 0$$

したがって，円運動においては等速円運動に限らず，物体の位置ベクトルと速度ベクトルは直交することがわかる。

■

[例題 7.2] 図のように宙返りをするジェットコースターのコースがある。宙返りの部分は直径 l の円軌道になっている。ジェットコースターにはモーターはついておらず，始めに与えた初速度によりコース上を移動する。摩擦は無視して以下の問いに答えなさい。



(1) 宙返り部分でジェットコースターに向心力を与える力はなにか。
(2) 無事宙返りするのに必要なジェットコースターの初速度 v_0 を求めなさい。
(3) JR 東日本は時速 360 km の新幹線を実用化するための実験車両を 2005 年に発表した。もし，ジェットコースターの初速度が時速 360 km であれば直径何 m の円軌道を描くだろうか。JR 東海は 2016 年にリニア

モーターカーで最高時速 603 km を記録しているが，これとほぼ同じ時速 600 km を初速度とすればどうだろうか。

[解説]

(1) ジェットコースターに働く力は重力とレールからの垂直抗力である (図 7.4)。よって向心力となりうるのは重力の円軌道の中心方向への作用と，レールの垂直抗力である。

(2) ジェットコースターの速度を v とおくと，ジェットコースターが宙返りするために必要な向心力 F は次式で与えられる。

$$F = \frac{mv^2}{l/2} = \frac{2mv^2}{l} \tag{7.12}$$

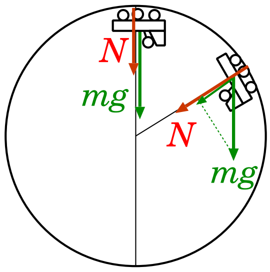


図 7.4 ジェットコースターに働く力

この向心力 F として働いている力は，重力の円軌道の中心方向への作用と，レールの垂直抗力 N である。その大きさは，垂直抗力が最も小さくなる円軌道の頂点において[*]

$$F = N + mg \tag{7.13}$$

であり，このときの垂直抗力の値は式 (7.12) と (7.13) より

$$N = \frac{2mv^2}{l} - mg \tag{7.14}$$

となる。垂直抗力 N が負になったらジェットコースターはレールからはずれてしまうので，$N \geq 0$ となるために v が満たすべき条件を上式から求めると

$$v \geq \sqrt{\frac{lg}{2}} \tag{7.15}$$

さらに，上式で与えられる速度の最小値 $v = \sqrt{\frac{lg}{2}}$ を達成するための初速度 v_0 を求めよう。エネルギー保存則より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_0^2 &= mgl + \frac{1}{2}mv^2 \\ v_0 &= \sqrt{2gl + v^2} \\ &= \sqrt{2gl + \frac{lg}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}lg} \quad \cdots (答)\end{aligned} \tag{7.16}$$

上式が，宙返りに必要な初速度の最小値である。単に高さ l まで上昇するのに必要な初速度よりも大きな値であることに注意すること。

(3) 式 (7.16) を l について解くと次式を得る。

$$l = \frac{2}{5}\frac{v_0^2}{g} \tag{7.17}$$

[*] 厳密には円軌道の頂点において垂直抗力が最も小さくなることも定量的に議論する必要があるが，ここではあえて省く。余力のある方は是非証明してみよう。

上式に $v_0 = 360$ km/h $= 100$ m/s, $g = 9.8$ m/s^2 を代入すると

$$\begin{aligned} l &= \frac{2}{5}\frac{(100\ \mathrm{m/s})^2}{9.8\ \mathrm{m/s^2}} \\ &\simeq 400\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

また，この円軌道の直径は初速度の 2 乗に比例するので，$v_0 = 600$ km/h ならば，

$$l = 400 \times \left(\frac{600}{360}\right)^2\ \mathrm{m} \simeq 1111\ \mathrm{m}$$

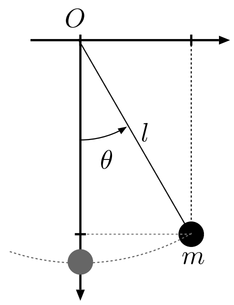
というわけで途方もなく大きな宙返りジェットコースターになる。

■

7.3 単振り子

ガリレイは，礼拝堂のシャンデリアの揺れを観察することで振り子の周期が振幅に関わらず一定であること（**振り子の等時性**）に気づいた (p.15)。振り子の運動を解析することで，この観察結果がもっともかどうかを検討してみよう。

[例題 **7.3**] 図のように長さ l の軽い糸の一端が天井に固定されており，もう一端に質量 m のおもりがぶら下がって揺れている。糸が鉛直線となす角を θ，重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。



(1) 糸の張力を T としておもりに働く力を図示しなさい。

(2) 原点を糸の固定端にとり，水平方向に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。おもりの運動方程式を書きなさい。

(3) $\theta \ll 1$ の時には $\sin\theta \simeq \theta$ が成り立つ。おもりのゆれは小さいとして，運動方程式を解いて角度 θ の時間変化を求めなさい。

(4) おもりの円運動の向心力の時間変化を求めなさい。

[解説]

(1) 図 7.5 に質点に働く力を示す。この後の問のために，張力 T の各軸方向の成分も図示している。

(2) 質点の運動方程式は次の通りである。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -T\sin\theta \\ m\ddot{y} &= mg - T\cos\theta \end{cases} \tag{7.18}$$

(3) $(x, y) = (l\sin\theta, l\cos\theta)$ の両辺を，時間微分していく

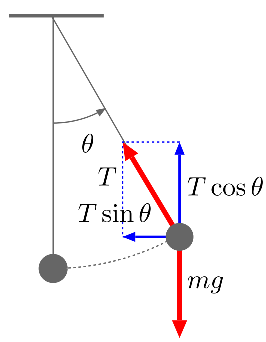


図 7.5 振り子のおもりに働く力

と次式を得る。

$$\begin{cases} \dot{x} &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} &= -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \tag{7.19}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} &= l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \\ \ddot{y} &= l(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases} \tag{7.20}$$

運動方程式 (7.18) に代入すると次式を得る。

$$\begin{cases} ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) &= -T\sin\theta \\ ml(-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta) &= mg - T\cos\theta \end{cases}$$

(第一式 $\times \cos\theta$) $-$ (第二式 $\times \sin\theta$) より次式を得る。

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{7.21}$$

ここで，題意より $\theta \ll 1$ なので $\sin\theta \sim \theta$ を用いると

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{7.22}$$

上式は，ばねにとりつけられた質点の運動方程式 (4.4) と定数項をのぞいて同じ形になっている。θ の時間変化はばねの運動の場合と同様にして以下のように求めることが出来る。

質点は周期運動するので解を

$$\theta = A\sin(\omega t + \phi), \quad (A, \omega : 定数) \tag{7.23}$$

と予想してみる。この式を 2 回微分すると

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2\theta$$

を得る。これを上式に代入すると

$$-\omega^2\theta = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

すなわち上式が成り立てば式 (7.23) は求める解となる。よって解は

$$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi\right) \quad \cdots (答) \tag{7.24}$$

ここで，A は振動の振幅であり，A と ϕ は初期条件に依存する値である。この解より，質点は周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ の運動を行うことがわかる。

この式より，周期は糸が長いと大きくなるが質点の質量には依存しないこともわかる。また，振幅がある程度小さいならば ($\theta \ll 1$)，ガリレオの発見の通り周期は振幅にも依存しないことがわかる。ただし，振幅が大きい場合には運動方程式 (7.18) を解くのは難しくなり，また，周期は振幅によって依存して変化する。

(4) 図 7.5 より質点にはたらく向心力は $T - mg\cos\theta$ であることがわかる。ここで，式 (7.21) について (第一式 $\times \sin\theta$) + (第二式 $\times \cos\theta$) を計算すると次式を得る。

$$ml\dot{\theta}^2 = T - mg\cos\theta \tag{7.25}$$

この式の右辺がちょうど向心力に等しい。よって振り子の場合も 7.2 節の等速円運動と同様に，向心力を $ml\dot{\theta}^2$ と書けることが確認できる。ゆえに向心力の時間変化は式 (7.24) を用いると

$$\begin{aligned} ml\dot{\theta}^2 &= ml\left(A\sqrt{\frac{g}{l}}\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\phi)\right)^2 \\ &= mgA^2\cos^2\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\phi\right) \quad \cdots (答) \end{aligned}$$

■

[**問 7.2**] 例題について以下の問いに答えなさい。

(1) 糸の角度および向心力の時間変化をグラフにしなさい。
(2) 向心力が 0 になるのはどのような角度のときか？
(3) 質点の力学的エネルギーは時間とともにどのように変化しているか？

7.4 宇宙速度

物体を地上で水平方向に投げてみよう。その物体はやがて地面におちるが，初速度を大きくしていくと，地面に落ちるまでの距離はだんだん長くなっていく。そしてある初速度になると，その物体は地球のまわりをぐるぐる回るはずである。この速度を**第 1 宇宙速度** という。

物体をもっと大きな速度で投げてみよう。初速度がある速度を越えると，その物体は見事地球から離れ，地球から無限に離れた遠方へと飛んで行くことになる。このような速度を**第 2 宇宙速度** という。ただし，この速度は物体を投げて地球外に飛ばすのに必要な速度であり，エンジンで推進力を加え続ける実際のロケットならばこれより小さい速度を維持しながら地球の引力圏外に達することも可能である。さらに，太陽系から脱出可能な最低の速度を**第 3 宇宙速度**という。

[**例題 7.4**] 地球の質量を $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg，地球の半径を $R = 6.38 \times 10^{6}$ m，万有引力定数を $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/s^2 kg として以下の問いに答えなさい。地球上の起伏や空気抵抗は無視すること。太陽などの地球以外の星の万有引力の影響も無視すること。

(1) **第 1 宇宙速度**を求めなさい。
(2) **第 2 宇宙速度**を求めなさい。

[解説] (1) 地表すれすれに物体が円軌道を行うための向心力を得られるだけの速度を求めることにより**第 1 宇宙速度**が得ることができる。すなわち，**第 1 宇宙速度**を v_1, 物体の質量を m とおくと次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
m\frac{v_1^2}{R} &= G\frac{Mm}{R^2} \\
v_1 &= \sqrt{\frac{GM}{R}}
\end{aligned}
$$

したがって，第 1 宇宙速度 v_1 は $v_1 \simeq \sqrt{GM/R} = 7.91$ km/s となる[*]。
(2) 物体が地上から発射した時の力学的エネルギーが，物体が地球から無限遠の距離に達したときにちょうど運動エネルギーが 0 になるような初速度が**第 2 宇宙速度** v_2 となる。すなわち，

$$
\begin{aligned}
-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_2^2 &= \lim_{r\to\infty} G\frac{Mm}{r^2} + \frac{1}{2}m\cdot 0^2 \\
\frac{1}{2}mv_2^2 = G\frac{Mm}{R}v &\geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \\
&= \sqrt{2}v_1 \\
&\simeq 11.2 \text{ km/s} \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

したがって，第二宇宙速度は $v_2 = 11.2$ km/s である。

[*] *節の例題で説明したように $mg = G\frac{Mm}{R^2}$ が成り立つので，これを用いると，$v_1 = \sqrt{gR}$ と簡単な形で書くことも出来る。

7.5　2 体問題：月の質量の量りかた

[問 7.3] 地球と月は万有引力で引き合うことによって円運動をしている。この円運動の軌道が真円だとみなし，地球と月の間の距離を R とする。地球と月の質量をそれぞれ M と m，地球から円運動の中心までの距離を r, 地球及び月の角速度を ω（両者の角速度は等しいことに注意）とすると，向心力の大きさ F を次式のように表すことができる。

$$
F = m(R-r)\omega^2 = Mr\omega^2 \qquad (7.27)
$$

また，向心力は万有引力によるものなので

$$
F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (7.28)
$$

以上の連立方程式より r, m を M, R, ω で表しなさい。

[解説] 月は地球の周りを約 27.3 日周期で公転している。前問の結果を利用すると，月の公転周期 $(2\pi/\omega)$，万有引力定数 G，地球の質量 M，および地球と月の間の距離 R を使って月の質量を求めることができる。万有引力定数と地球の質量の求め方は 3.5 節で述べた通りである。残る未知数の月までの距離は古代ギリシャ時代に測られていた。その方法でまず月までの距離を求めて，そして月の質量を求めてみよう。

7.5.1 月までの距離の測りかた

古代ギリシャ時代に，**ヒッパルコス**[†] は**地球から月までの距離**を見積もった。その方法は以下のようなものと言われている。同じ時刻[‡] に月が水平に見える地点と，真上に見える地点をさがす。この 2 点間と地球の中心のなす角度がわかれば，月までの距離が地球の半径の何倍かを求めることが出来る。

[†] ヒッパルコス (Hipparchus, BC190-BC125 頃) は天体観測のために三角関数表 (正弦表) も作成した

[‡] 古代ギリシャ時代には，遠く離れた 2 地点での同時刻性を確認できるような精度の高い時計はなかったはずである。おそらくは月食などの天体現象を利用して同時刻であることを判断したと考えられる。

[問 **7.4**] ヒッパルコスが月までの距離を測るのに，どこの 2 地点で観測を行ったかはわからないが，ヒッパルコスはその 2 地点と地球の中心のなす角度が 89 度であると結論づけた。そして，地球の半径に対して地球と月の間の距離が何倍であるかを計算した。さて，地球が真円でありその周の長さを 40,000 km とした場合に**地球と月の間の距離**が何 km か求めなさい。現在は地球と月の間の距離は約 38.4×10^4 km であることがわかっている。

[解説] ヒッパルコスは，星の高さが観測地点によって異なることに気づき，そのことから経度・緯度の概念を確立した。**緯度は北極星の高さの測定により決定できる。 2 地点の経度の違いは，ある星の高さを同時に測ることができれば決定できる**。経度や緯度を決定できれば 2 地点と地球の中心のなす角度も決定できる。

[問 **7.5**] 以上のことを幾何学的に説明しなさい。

[解説] 緯度が実際に世界各地で正確に測れるようになったのは，**ホイヘンス** (p.15) による振り子時計の発明以降である。それまでの時計は重りが自重で落下するのを利用したもので，一日数 10 分狂うものであり，秒単位の計時は行えなかった。一方，振り子時計は一日数十秒という精度の高いものであり，秒単位の計時も可能になった。この発明のおかげで太洋の航海で必要な緯度の測定精度が大幅に上がり，ヒトが世界規模で移動する大航海時代の幕開けにつながっていった[*]。ただしゼンマイ時計には揺れる船では精度が良くなるという欠点があった。そこでホイヘンスは，ぜんまいが振子のように周期的な振舞をするという**フック** (p.50) の発見を利用して，ぜんまい式の壊中時計も開発した。

[*] 「サイバネティクス」[10] p.47

7.5.2 月の質量

[問 **7.6**] 3.5 節で述べた万有引力定数および地球の質量と，前節で述べた月までの距離を用いて月の質量を求めなさい。現在，**月の質量**は 7.34×10^{22} kg と見積もられている。

7.6 角運動量

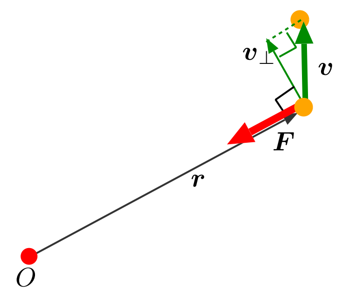
ケプラー (p.28) は天体の運動について 3 つの法則を発表した。その 1 つに

> **惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間あたりに描く面積は常に一定である（面積速度一定）**

というものがある。これを証明してみよう。

[例題 7.5] 図のように，質量 m の質点が原点に向かう力 $\boldsymbol{F}$ を受けながら運動している。質点の速度 $\boldsymbol{v}$ のうち動径成分と直交する速度成分 $v_\perp$ が次式を満たすことを示しなさい。

$$m r \dot{v}_\perp = 0 \tag{7.29}$$



ここで，r は原点から質点までの距離であり，質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると $r = |\boldsymbol{r}|$ である。

[解説] 力 F は $v_\perp$ の方向と直交するので，$v_\perp$ の方向の質点の運動量は微小時間 Δt において変化しない。すなわち，

$$m v_\perp(t + \Delta t) - m v_\perp(t) = 0 \tag{7.30}$$

両辺に r をかけると次式が得られる。

$$m r v_\perp(t + \Delta t) - m r v_\perp(t) = 0 \tag{7.31}$$

ここで，左辺の $m r v_\perp$ は**角運動量** (angular momentum) と呼ばれる量である。

両辺を Δt で割ると

$$\frac{m r v_\perp(t + \Delta t) - m r v_\perp(t)}{\Delta t} = 0 \tag{7.32}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考えると

$$\frac{d}{dt}(m r v_\perp) = 0 \tag{7.33}$$

ここで，角運動量 $m r v_\perp(t)$ を $l(t)$ と表すと上式は

$$\frac{dl}{dt} = 0 \tag{7.34}$$

となる。この式は，

> 物体に対する向心力の源に角運動量の軸をとれば，**向心力は物体の角運動量に影響を与えない**

ことを示している。

■

例題で考えた質点が惑星であるとし，原点に太陽があるとしよう。図 7.6 に示すように惑星が太陽から万有引力を受けながら時間 Δt の間に $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} \Delta t$ だけ進んだとすると，その間に太陽と惑星が結ぶ線分が描く面積 ΔS は次式になる。

$$\Delta S = \frac{1}{2} r v_\perp \Delta t \tag{7.35}$$

$\Delta t \to 0$ の極限を考えると，

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v_{\perp} \tag{7.36}$$

ケプラーの面積速度一定の法則は，上式の値が常に一定であることを主張するものである。したがって次式を証明すれば，面積速度一定の法則を証明したことになる。

$$\frac{d^2S}{dt^2} = 0 \tag{7.37}$$

ここで式 (7.36) より

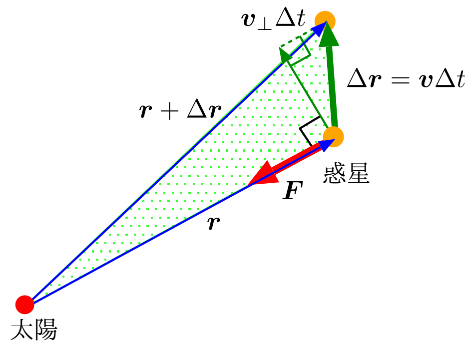


図 7.6　惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間あたりに描く面積 (緑) は常に一定である

$$\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r v_{\perp}) \tag{7.38}$$

惑星の運動については前の例題で証明した通り角速度一定の法則が成立するので (式 (7.33))，上式の値が 0 になることがわかる。すなわち面積速度一定を表現する式 (7.37) は，角速度一定の法則からただちに証明できる。言いかえる面積速度一定の法則は角速度一定の法則と等価なものである。

7.7 回転座標での見かけの力：遠心力

3.7 節で述べたように，ある座標系が慣性系に対して加速度運動している時には，その座標系内では見かけの力が生じる。円運動をしている物体には向心力がはたらき，向心加速度が生じている。そのため，円運動をしている系の内部にいる人 (物) は見かけの力を感じることになる。円運動をしている系の内部でじっとしている人が感じる力の大きさは

$$\begin{aligned} \text{質量}\times\text{向心加速度} &= mr\omega^2 \\ &= m\frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

であり，向きは向心加速度と逆向き (動径外向き) である。この力を**遠心力** (centrifugal force) とよぶ。ここで，m は物体の質量，r は円運動の半径，ω は円運動の角速度，v は物体の速さである。

[問 7.7] スペースシャトルが周回軌道にのるときの地上からの高度は約 280km である。

(1) この軌道上での重力加速度は，地上に比べて何倍程度になるか?

(2) 前問の通りスペースシャトルに対する重力の影響は実は非常に大きいはずである。しかし，宇宙飛行士の向井千秋さんが

　　「宙返り何度もできる無重力」

と詠んだ通り，スペースシャトル内で宇宙飛行士は無重力と感じるようである。この矛盾の理由を説明しなさい。

(3) スペースシャトルが同じ高度の周回軌道を保ちながら，地球を回る速度を少し上げるような飛行制御を行った。このとき，スペースシャトル内ははやり無重力と感じるだろうか？

[解説] 3.7 節の問でもふれたように，自由落下する物体内では無重力に感じられる。この問から，地球上の自由落下の一つの極限として存在する円軌道上の物体においても同様に無重力と感じられることがわかる。3.2 節でも述べたが，このようにある閉じた系にいるヒト (スペースシャトルの中のヒト) が，自分は外部から力を受けていないことを証明するのは困難であり，その系の外側にいるヒト (スペースシャトルが地球の周りをまわっていることを観察しているヒト) によって初めて可能になる[*]。

[*] 厳密には，スペースシャトルのような円軌道を描く物体の内部にいる場合には，次節で述べるコリオリの力によって，自分が円運動を行っていることを推定できる。

7.8 回転座標でのみかけの力：コリオリの力

太郎君は，水平にのばした手におもりを持って，砲丸を投げる時のようにぐるぐると回して遊んでいた。このとき太郎君には，おもりは目線の先に静止して見えた。つぎに，太郎君は同じ回転数でまわりながら，手を縮めておもりを引きよせてみた。このおもりは突然加速して動き出したように見えた。このおもりを加速したのは一体誰なのだろうか? 回転座標系に表れる慣性力に遠心力が存在することはすでに述べた。しかし，遠心力はおもりの加速した向きと直交しているので，おもりの加速に無関係のはずである。このように回転座標系で物体を観察したときに表れる，遠心力以外のみかけの力を**コリオリの力** (Coriolis effect, **転向力**) [*] という。

[*] 「コリオリの力」はその提唱者であるコリオリにちなんでつけられた名前。コリオリについては p.64 参照。

[問 7.8]

(1) おもりの質量を m，はじめの回転軸 (胴体) からおもりまでの距離を r, 手を引きよせた後の距離を $r - \Delta r$，引きよせるのにかかった時間を Δt とする。地上から見た時の，おもりのはじめの角速度を ω として，おもりを引きよせた後の速度 ω_a を求めよ。太郎君の質量は無視できるとする。

(2) おもりをまわしている人に対して静止した座標系で，おもりを引きよせる前後の角運動量の変化から，おもりにはたらいた (見掛けの) トルク (コレオリの力によるトルク) を求めよ。また，$\Delta t \to 0$ の極限の場合にコリオリの力の大きさが $2m\omega\dfrac{dr}{dt}$ となることを示しなさい。

[問 7.9] 回転座標系においては動径方向に運動する物体に対して，回転方向のコリオリの力がはたらくことが前問よりわかる。つまり，回転する円盤にのった人が中心からまっすぐ動径方向に歩こうとしてもこのコリオリの力によって曲がってしまう。その理由を簡単な絵を書いて説明しなさい。

[問 7.10] コリオリの力は円周方向に運動する物体に対しても働く。太郎君が，角速度 ω で回転する円盤の円周にそって歩いてみた。円盤に固定した回転座標系で見ると，太郎君の角速度は ω_t だったとする。

(1) 地上から見たとき，太郎君が円運動するのに必要な向心力はどれだけだろう? この向心力をちょうど逆向きにした力を太郎君は慣性力として感じることになる。

(2) 太郎君が感じる慣性力は，円盤の上でじっとしていても感じる遠心力，太郎君が円盤に対して動くことによって生じる遠心力，そしてコリオリの力か

らなる。このコリオリの力の大きさが前問の問題で得られた大きさと同じ $2m\omega v$ であることを示しなさい。

[解説] コリオリの力はこれまでの設問から類推できるように, 回転座標系上で運動する物体に対して働くみかけの力であって, その向きは運動の方向と直交しており，大きさは $2m\omega v$ となる。地球上ではこのコリオリの力が気象や大洋の流れに影響を及ぼしている。その代表例の一つが台風など強い低気圧による渦であり，その渦の向きは北半球と南半球では逆になる (図 7.7)。

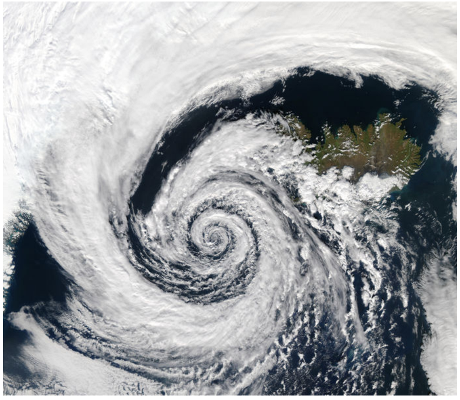


図 7.7 アイスランドに発生した低気圧 (Photo by NASA http://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_force)

第 8 章

剛体の運動

ここまで章では質点の運動を扱ってきた。剛体の運動を考えるとき，剛体を質点の集合と考えればその並進運動は重心に注目すれば質点と同じように扱えることは 6.4 節で説明した通りである。剛体の運動を考えるには並進運動だけではなく回転運動も考える必要がある。剛体の回転運動はどのように記述したらいいのだろうか。

8.1　剛体上の質点の回転運動

8.1.1　トルク，慣性モーメント，運動方程式

[例題 **8.1**]　図 8.1 のように，質量 0，長さ r の棒の先に質量 m の質点がとりつけられている。この棒のもう一端は軸回りに自由に回転できるようになっている。質点は力 $\boldsymbol{F}$ を受けて，時間 Δt の間に原点のまわりを微小角度 $\Delta\theta$ 回転した。力 $\boldsymbol{F}$ と質点の位置 $\boldsymbol{r}$ のなす角を ϕ として，以下の問に答えなさい。

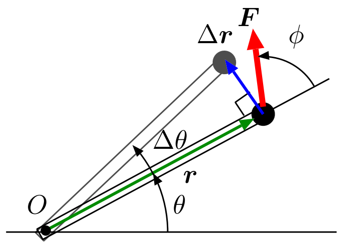


図 8.1　質量が先端に集まった棒の運動

(1) 力 $\boldsymbol{F}$ が質点に対してした仕事 W を $F = |\boldsymbol{F}|$, r, $\Delta\theta$ を用いて表しなさい。

(2) 時間 Δt の間の質点の運動エネルギーの変化 ΔK を $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\theta}(t+\Delta t)$ を用いて表しなさい。

(3) 棒は質点の運動を拘束するが，棒が質点に与える力は質点の進行方向と直行するため仕事はしない。よって $\Delta K = W$ が成立することから，次式を導きなさい。

$$mr^2\ddot{\theta} = Fr\sin\phi \tag{8.1}$$

[解説]

(1) 棒の回転が微小であれば，質点の位置 $\boldsymbol{r}(t)$ と変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ は直交しているとみなすことができる。このとき変位の大きさは $|\Delta\boldsymbol{r}| = r\Delta\theta$，力 $\boldsymbol{F}$ の変位方向の作用の大きさは $F\sin\phi$ なので (図 8.2)，力 $\boldsymbol{F}$ のした仕事 W は次式で与えられる。

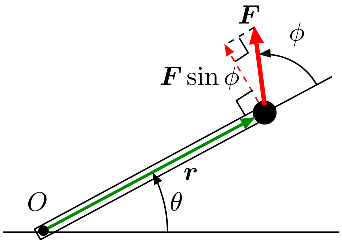


図 8.2

$$\begin{aligned} W &= (F\sin\phi)\cdot(r\Delta\theta) \\ &= Fr\Delta\theta\sin\phi \quad \cdots (1) \text{ の答} \end{aligned}$$

(2) 質点の運動エネルギーの変化は以下の通り。

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}(t+\Delta t))^2 - \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}(t))^2 \cdots \quad (2) \text{ の答}$$

(3) $\Delta K = W$ より

$$\frac{1}{2}m(r\dot{\theta}(t+\Delta t))^2 - \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}(t))^2 = Fr\Delta\theta\sin\phi$$

が成り立つ。両辺を Δt で割ると次式を得る。

$$\frac{1}{2}mr^2\frac{(\dot{\theta}(t+\Delta t))^2 - (\dot{\theta}(t))^2}{\Delta t} = Fr\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\sin\phi$$

Δt が十分小さいとして $\Delta t \to 0$ の極限を考えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mr^2\frac{d}{dt}(\dot{\theta})^2 &= Fr\frac{d\theta}{dt}\sin\phi \\ \frac{1}{2}mr^2\cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} &= Fr\dot{\theta}\sin\phi \\ mr^2\ddot{\theta} &= Fr\sin\phi \end{aligned}$$

となり式 (8.1) を導くことができる。

■

式 (8.1) の左辺の mr^2 を質点に対する原点まわりの**慣性モーメント** (moment of inertia) と呼ぶ。また，右辺の $Fr\sin\phi$ を**トルク** (torque)， または**力のモーメント** (moment of force) と呼ぶ。図 8.2 を見ると

> **力のモーメント（トルク）は，軸から力の作用点までの距離 r と，力が回転方向に寄与する作用 $F\sin\phi$ の積で与えられる**

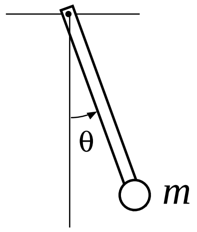
ことがわかる。

式 (8.1) で慣性モーメントを $I = mr^2$，トルクを $\tau = Fr\sin\phi$ とおき直すと 以下のように書くことができる。

$$I\ddot{\theta} = \tau \tag{8.2}$$

後述するように，これが**物体の回転を扱う運動方程式**である。

練習問題 8.1 右図のように，質量 0，長さ r の棒の先に質量 m のおもりがついている。棒はおもりのついてない方の端に軸があり天井からぶら下げられている。棒と鉛直方向のなす角を θ，重力加速度の大きさを g とし，摩擦は無視できるとする。以下の問に答えなさい [答 1]。



(1) この棒の軸回りの慣性モーメントを求めよ。
(2) 重力による回転のトルクを答えなさい。
(3) この棒の回転の運動方程式を書きなさい。

8.1.2 角運動量

式 (8.1) を時刻 t から時間 Δt にわたって積分すると次式が得られる。

$$mr^2\dot{\theta}(t+\Delta t) - mr^2\dot{\theta}(t) = \int_t^{t+\Delta t} Fr\sin\phi dt \tag{8.3}$$

ここで，$mr^2\dot{\theta}$ は**角運動量** (angular momentum) と呼ばれる量である。トルク $\tau = Fr\sin\phi$ が時間によらず一定の場合には以下のように書ける。

$$mr^2\dot{\theta}(t+\Delta t) - mr^2\dot{\theta}(t) = Fr\sin\phi \cdot \Delta t \tag{8.4}$$

ここで，角運動量 $mr^2\dot{\theta}(t)$ を $l(t)$ と表すと上式は

$$l(t+\Delta t) - l(t) = \tau\Delta t \tag{8.5}$$

となる。この式は，

> **角運動量の変化はトルクの力積で与えられ，トルクが働かなければ角運動量は保存する**

ことを示している。また，質点に働く力が質点と原点を結ぶ動径方向と一致する場合にはトルクは 0 になるので，やはり角運動量は保存する。

式 (8.5) の両辺を Δt で割り $\Delta t \to 0$ の極限をとると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{l(t+\Delta t)-l(t)}{\Delta t} &= \tau \\ \dot{l}(t) &= \tau \end{aligned} \tag{8.6}$$

ニュートンの第 2 法則は，質点に働く力が運動量の時間変化と等しくなることを示すが，上式は

> **質点に働くトルクが角運動量の変化と等しい**

ことを示しており，回転運動を記述する運動方程式になっている。**角運動量もトルクも軸を定義してはじめて計算できる量であることに注意すること。**

練習問題 8.2 アイススケートの選手が回転するとき，はじめ手を広げてゆっくり回っているが，手を縮めるとともに回転数がはやくなっているように見える。どうして手を縮めると回転数が上がるのか説明しなさい。

[答 1] (1) ml^2 (2) $-mgl\sin\theta$ (3) $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$

8.1.3 回転運動のベクトル表記 *

式 (8.1) の右辺で与えられる力のモーメントは，力の作用点を表す位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と力ベクトル $\boldsymbol{F}$ のベクトル積 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ の大きさに等しい。またこのベクトル $\boldsymbol{\tau}$ の向きは，力 $\boldsymbol{F}$ によって生じる回転軸を表している。すなわち，右ねじが $\boldsymbol{\tau}$ の向きに進むときの回転方向が，力 $\boldsymbol{F}$ が与える回転の作用方向である。このベクトル $\boldsymbol{\tau}$ が，**トルク (力のモーメント)** のベクトル表記である。

[問 **8.1**] 例題 8.1 の質点の運動量を $\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$ とおくと，運動方程式は次式の通り。

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} \tag{8.7}$$

この運動方程式と位置 $\boldsymbol{r}$ とのベクトル積をとると，

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{8.8}$$

となる。式 (8.1) に回転軸の向きを考慮してベクトルで記述したものが上式になっていることを説明しなさい。

[解説] ベクトル $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ を使って，上式を次のように書くことも出来る.

$$\dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{\tau} \tag{8.9}$$

ベクトル $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ を**角運動量ベクトル**もしくは単に**角運動量**とよぶ。上式がトルクによる回転運動をあらわす運動方程式のベクトル表現である。

[問 **8.2**] **角運動量ベクトル** $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ の大きさが前節で示した $mr^2\dot{\theta}$ と等しいことを示しなさい。

8.2 剛体の回転運動

8.2.1 慣性モーメント

剛体を質点が N 個集まったものであると考えよう (図 8.3)。質点 P_i $(i = 1, \ldots, N)$ の質量を m_i, 剛体の重心 O からの距離を r_i とする。また，剛体の角度，すなわち重心 O をとる基準線と慣性系に置いた基準線（例えば水平線）のなす角 θ とし，さらにこの重心 O をとおる基準線と OP_i のなす角を ϕ_i とする。

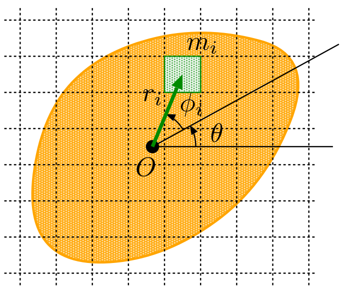


図 8.3

各質点の回転運動が式 (8.2) のように記述されることから，トルク τ_i, $(i = 1, \ldots, N_\tau)$ を受けている剛体の回転運動を記述する運動方程式は次式のようになる。

$$\sum_i^N m_i r_i^2 \frac{d^2}{dt^2}(\theta + \phi_i) = \sum_i^{N_\tau} \tau_i \tag{8.10}$$

ϕ_i は定数なので，

$$\sum_i^N m_i r_i^2 \ddot{\theta} = \sum_i^{N_\tau} \tau_i \tag{8.11}$$

$$I = \sum_i^N m_i r_i^2 \tag{8.12}$$

とおき，I を**剛体の慣性モーメント** と呼ぶ。**慣性モーメント**も回転軸を定義してはじめて計算できる量である。この式より，質量の分布が回転軸から遠いところにあるほど，慣性モーメントは大きいことがわかる。

複数の質点で構成される剛体の回転運動は次式で記述される。

$$I\ddot{\theta} = \tau \tag{8.13}$$

右辺の τ は，剛体に働くトルクの総和である。この式から，同じトルクを与えても慣性モーメントが大きい剛体ほど回転しにくいことがわかる。同じ質量の物体でもその形や軸の位置によって慣性モーメントは変化することに注意せよ。

この式はちょうどニュートンの運動方程式と同じ形をしている。つまり，質点の運動と剛体の運動では，質量と慣性モーメント，加速度と角加速度，力とトルクがそれぞれ対応する。

[問 8.3] 質量 M の棒の端点まわりの慣性モーメントを I, 重心回りの慣性モーメントを I_{COM}，端点から重心までの距離を r_{COM} とすると次式が成り立つことを証明しなさい。

$$I = I_{COM} + Mr_{COM}^2 \tag{8.14}$$

練習問題 8.3 質量のない長さ l の棒の両端に質量 m と M のおもりがついている。棒の中心には摩擦の無い軸があり，鉛直面内を回転できるようになっている (答 2 。

(1) この棒の慣性モーメントを求めなさい
(2) この棒の運動方程式を書きなさい。

8.2.2 回転による運動エネルギー

[問 8.4] 質点の集合である剛体が軸の回りを回転しているとき，その**回転による運動エネルギー** T を次式で与えられることを示しなさい。

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \tag{8.15}$$

8.2.3 連続体の慣性モーメント

(答 2 (1)$I = m(\frac{l}{2})^2 + M(\frac{l}{2})^2$ (2)$\{m(\frac{l}{2})^2 + M(\frac{l}{2})^2\}\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \cdot \frac{l}{2} + mg\sin\theta \cdot \frac{l}{2}$

端に軸があり長さ l, 質量 m の，質量分布が一様な棒の慣性モーメント を考えてみよう (図 8.4(a))。この棒の単位長さあたりの質量（**線密度**）を ρ とおくと，

$$\rho = \frac{m}{l} \tag{8.16}$$

なので，軸から距離 $x \sim x + dx$ の微小区間の質量は ρdx である。よってこの微小区間の慣性モーメント ΔI は次式で求まる (図 8.5)。

$$\Delta I = x^2 \rho dx \tag{8.17}$$

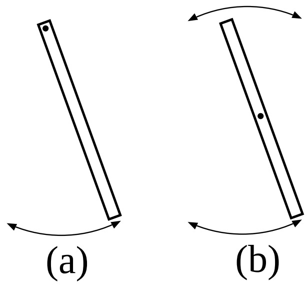


図 8.4

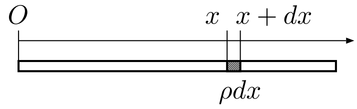


図 8.5

これを全区間 $x \in [0, l]$ で足し合わせれば**棒の端のまわりの慣性モーメント** I_t を求めることができる。

$$I_t = \int_0^l x^2 \rho dx = \frac{1}{3} l^3 \rho = \frac{1}{3} m l^2 \tag{8.18}$$

ここで，式 (8.16) より $\rho l = m$ を用いた。

同様にして，**棒の重心まわりの慣性モーメント** I_c(図 8.4(b)) は次式で求めることができる。

$$I_c = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \frac{1}{12} m l^2$$

このように同じ物体であっても軸をどこにするかによって慣性モーメントは変わり，軸から離れたところに質量が分布していると慣性モーメントは大きくなる ($I_t > I_c$)。よって慣性モーメントについて述べるときには，必ず軸がどこかを明示する必要がある。

より一般的に，２次元の物体の慣性モーメントは次式で与えられる。

$$I = \int_S (x^2 + y^2) \rho dS \tag{8.19}$$

ここで，dS は物体の微小面積であり，積分は物体全体 S にわたって行う。ρ は物体の面密度である。３次元の物体も同様である。

図 8.6 は馬の走る様子を表している。

図中の馬のように動物の足は一般に根元が太く，先は細くなっている。このような構造をとることで，足の慣性モーメントが小さくなるので，足を振る際のエネルギーを抑えることができる。また，図のように多くの動物はゆっくり歩くときには足先を地表近くで振るが，走る時には重い足をわざわざ高く持ち上げて走る。重力に逆らって足を持ち上げるには仕事が必要となるが，膝関節を屈曲させることで脚全体の慣性モーメントを小さくすることができるので，早く足を動かさないといけない走行においては，消費エネルギーを抑える上で有利になる。

8.3 剛体の運動

剛体の運動を解析する場合，その並進運動は重心対してニュートンの運動方程式を書けば議論できる（6.4 節）。さらに重心まわりの回転を議論すれば剛体の運動

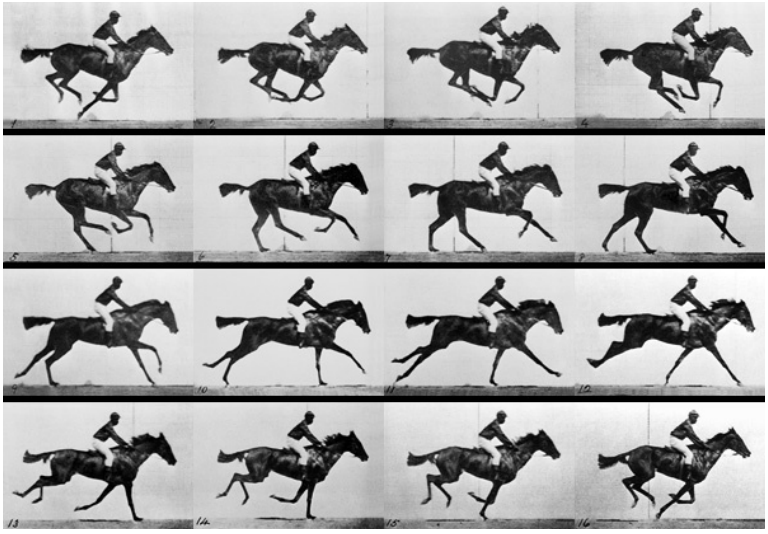


図 8.6 多くの動物は走るとき足を折り畳んで前に振る。これによって脚の慣性モーメントが小さくなり，楽に足を前にふることができる。(Photo by E. Muybridge, 1887)

を記述できることになる (図 8.7)。

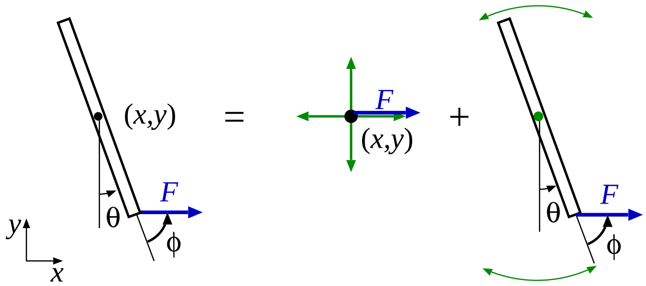


図 8.7 剛体の運動は重心の並進運動と重心回りの回転により記述できる

> [例題 8.2] 図 8.7 のように，ちょうど中心に重心がある長さ l の棒がなめらかな机の上に水平におかれている。その端に力 F が働いたときの棒の運動方程式を書きなさい。力 F の向きは棒に対して角度 ϕ の向きであったとし，棒の重心周りの慣性モーメントは I とする。

[解説] この棒の並進方向の運動方程式は以下の通りである。

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= F \\ m\ddot{y} &= 0 \end{cases} \tag{8.20}$$

回転方向の運動方程式は次式の通りである。

$$I\ddot{\theta} = \frac{l}{2} F \sin\phi \tag{8.21}$$

以上の運動方程式の解を求めれば，この棒の運動の記述することができる。■

Bibliography

[1] 「尺」*(2017年2月5日 (日) 17:18 UTC版)*『フリー百科事典　ウィキペディア日本語版』*http://ja.wikipedia.org/*. URL: https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%B0%BA (cit. on p. 1).

[2] Henry Cavendish. "Experiments to Determine the Density of the Earth". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 88 (1798), pp. 469, 526. URL: https://books.google.co.jp/books?id=zrkEAAAAMAAJ&pg=PA62&redir_esc=y (cit. on p. 31).

[3] *Galileo Galilei (29 March 2017, at 20:55 UTC) in Wikipedia: The Free Encyclopedia. (http://en.wikipedia.org/)*. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei (cit. on p. 15).

[4] Andrew Janiak. *Newton's Philosophy*. Ed. by Edward N. Zalta. URL: https://plato.stanford.edu/entries/newton-philosophy/ (cit. on p. 27).

[5] Issac Newton. *Newton's Principia : the mathematical principles of natural philosophy*. Trans. by Andrew Motte. New-York : Published by Daniel Adee, 1846. URL: https://archive.org/details/100878576 (cit. on p. 15).

[6] Issac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Londini : Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures bibliopolas, 1687. URL: https://archive.org/details/philosophiaenat00newt (cit. on pp. 15, 17).

[7] Issac Newton. *The method of fluxions and infinite series : with its application to the geometry of curve-lines*. Trans. by M. A. John Colson and F. R. S. London: : Printed by Henry Woodfall; and sold by John Nourse, 1736. URL: https://archive.org/details/methodoffluxions00newt (cit. on p. 2).

[8] "What medicine owes to Galileo". *The popular science monthly* 14 (1879). URL: https://en.wikisource.org/wiki/Popular_Science_Monthly/Volume_14/January_1879/Popular_Miscellany (cit. on p. 15).

[9] A. アインシュタイン and I. インフェルト. 物理学はいかに創られたか 上巻. Trans. by 石原 純. 岩波文庫, 1939 (cit. on p. 25).

[10] N. ウィナー. サイバネティクス 第二版. Trans. by 池原 止戈夫他. 岩波書店, 1962 (cit. on p. 106).

[11] ガリレオ・ガリレイ. **新科学対話 上** *(***岩波文庫 青** *906-3)*. Trans. by 今野 武雄 and 日田 節次. 岩波書店, 1995 (cit. on pp. 13–15).

[12] ガリレオ・ガリレイ. **新科学対話 下** *(***岩波文庫青** *906-4)*. Trans. by 今野 武雄 and 日田 節次. 岩波書店, 1995 (cit. on pp. 1, 13).

[13] ガリレオ・ガリレイ. **星界の報告 他** *1* **篇** *(***岩波文庫 青** *906-5)*. Trans. by 山田 慶児 and 谷 泰. 岩波文庫, 1976 (cit. on p. 13).

[14] D. L. グッドスティーン and J. R. グッドスティーン. **ファインマンさん，力学を語る**. Trans. by 砂川重信. 岩波書店, 1996 (cit. on p. 15).

[15] コペルニクス. **天体の回転について** *(***岩波文庫 青** *905-1)*. Trans. by 矢島 祐利. 岩波書店, 1953 (cit. on p. 13).

[16] S. チャンドラセカール. **チャンドラセカールの「プリンキピア」講義** *(***監訳：中村誠太郎***)*. 講談社, 1998 (cit. on pp. 15, 17, 25, 28, 43).

[17] R. P. ファインマン, R. B. レイトン, and M. L. サンズ. **ファインマン物理学**. Trans. by 坪井 忠二. 岩波書店, 1967 (cit. on p. 31).

[18] 鈴木 一義. “江戸の最先端技術”. **芸術新潮** (July 2001) (cit. on p. 2).

[19] 遠藤 三郎. **音楽用語・楽器名由来辞典**. 日音, 1992 (cit. on p. 1).

[20] 安野 光雅. **天動説の絵本ーてんがうごいていたころのはなし**. 福音館書店, 1979 (cit. on p. 13).

[21] 佐々木 勝浩 et al. “和時計における不定時法自動表示機構”. *Bull. Natn. Sci. Mus., Tokyo, Ser. E.* 28 (2005), pp. 31–47. URL: http://ci.nii.ac.jp/naid/110006141349/ (cit. on p. 2).

[22] 独立行政法人 産業技術総合研究所 計量標準総合センター 国際単位系 (SI) 日本語版刊行委員会 (訳) 国際度量衡委員会単位諮問委員会 (著). **国際単位系** *(SI)* **第** *8* **版の要約**. URL: https://www.nmij.jp/library/units/si/R8/SI8JC.pdf (cit. on p. 3).

[23] 平松 希伊子. “一七世紀科学革命と音楽–一デカルト研究者の視点から”. **人間存在論** 16 (2010) (cit. on p. 15).

[24] 吉田 忠. “C. ホイヘンス『運まかせゲームの計算』について”. **統計学** 88 (Mar. 2005) (cit. on p. 15).

[25] 藤堂 明保 et al., eds. **漢字源**. 学習研究社改訂第五版, 2010 (cit. on p. 1).

[26] **明治五年太政官布告第三百三十七号（改暦ノ布告）**. 1872. URL: http://law.e-gov.go.jp/cgi-bin/idxselect.cgi?IDX_OPT=5&H_NAME=&H_NAME_YOMI=%82%A0&H_NO_GENGO=H&H_NO_YEAR=&H_NO_TYPE=2&H_NO_NO=&H_FILE_NAME=M05SE337&H_RYAKU=1&H_CTG=1&H_YOMI_GUN=1&H_CTG_GUN=1 (cit. on p. 2).

[27] 秋山 晋一. “「ガリレオの望遠鏡 精密復元」の調査記録 ～400 年前の望遠鏡作りへの誘い～”. **天文教育** 22.2 (2010). URL: http://tenkyo.net/kaiho/pdf/2010_03/2010-03-02.pdf (cit. on p. 13).

[28] 角山 栄. **時計の社会史** *(***中公新書***)*. 中公公論社, 1984 (cit. on pp. 2, 15).

[29] 山本 義隆. “「Euler の力学」”. **数理解析研究所考究録**. Vol. 1608. 2008, pp. 1–13 (cit. on p. 17).

[30] 山本 義隆. **磁力と重力の発見 *3*–近代の始まり**. みすず書房, 2003 (cit. on p. 28).

[31] 河合 良訓 (監修). **骨単**. NTS, 2004 (cit. on p. 1).

[32] 西條敏美. **物理学史断章–現代物理学への十二の小路–**. 恒星社厚生閣, 2001 (cit. on pp. 61, 66).

[33] **計量法（平成四年五月二十日法律第五十一号）第二章第三条**. 1992. URL: http://law.e-gov.go.jp/htmldata/H04/H04HO051.html#1000000000002000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 (cit. on p. 1).

[34] **計量法施行法・御署名原本・昭和二十六年・法律第二〇八号**. 1951. URL: https://www.digital.archives.go.jp/DAS/meta/Detail_F0000000000000105496 (cit. on p. 1).

[35] 藤井 賢一. “質量標準の現状とキログラム (kg) の定義改定をめぐる最新動向”. **計測と制御** 53.2 (2014), pp. 144–149 (cit. on p. 3).

索引

ら