力学の基礎訓練:演習

2019 年 4 月 12 日版　西井 淳

目次

1　基本概念

1.1　基本単位

[問 **1**] 以下の単位を答なさい。

(1) MKS 単位系での速度の単位はなにか? 速度の定義に基づいて述べよ。

(2) MKS 単位系での加速度の単位はなにか? 加速度の定義に基づいて述べよ。

1.2　位置・速度・加速度

[問 **2**] 以下の問に答えよ。計算過程では数値に必ず単位を併記しながら計算すること。

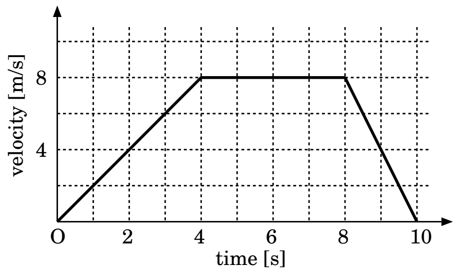
(1) フルマラソン (42.195km) の世界記録は 2006 年現在 2 時間 4 分 55 秒である。40km を 2 時間で走ったと概算し（精度はどの程度か考えよ)，世界記録ランナーの平均時速および秒速を求めよ。計算の過程では単位もともに計算すること。

(2) 100m 走の世界記録は 2006 年現在 9 秒 77 である。100m を 10 秒で走ったと概算し (精度はどの程度か考えよ)，平均時速および秒速を求めよ。

(3) 野球のピッチャーが投げる投球の速さの世界記録は 2006 年現在 162.4km/hr である。ピッチャーマウンドから本塁ベースまでの距離は 18.440m である。ピッチャーがボールを投げてから本塁ベースに届くまでの時間を概算せよ。

[問 **3**]　停止していた車が時刻 $t = 0$ に動きだし，その後 10 秒間に図のような速度変化を示した。この 10 秒間に物体が動いた距離を以下の 3 つの方法で求めなさい (答 1 。

(答 1　(1) $(v(0)+v(1)+v(2)+\cdots+v(8)+v(9))\cdot\Delta t = (0+2+4+6+8\times5+4)$[m/s] $\times$ 1[s] $= 56$ [m] (2) $\frac{1}{2}\times(4+10)$ [s] $\times$ 8 [m/s] $= 56$ [s] (3) $x = \int_0^4 2tdt + \int_4^8 8dt + \int_8^{10}(-4t+40)dt = 56$ m



(1) 1 秒毎の速度 $v(t)$ $(t = 0, 1, 2, \ldots, 9$ [s]) を確認し，それをもとに $\Delta t = 1$ s の間に進んだ距離 $v(t)\Delta t$ をそれぞれ求め，その和により 10 秒間の移動距離を求める。

(2) 速度と時間の関係を示す線と t 軸で囲まれた台形の面積を求める。

(3) 物体の速度 v と時間 t の関係式を書き，積分計算で求める。

[問 **4**]　問 3 の物体について以下の問に答えなさい (答 2 。

(1) 物体の加速度が 0 であるのはいつか。

(2) 物体の加速度が負であるのはいつか。

(3) この 10 秒間の物体の加速度を図示しなさい。

2　力学の基本法則

2.1　運動方程式

[問 **1**] MKS 単位により力の単位を表すとどうなるかを，ニュートンの運動方程式より求めよ。また，その略号と読み方はなにか？

[問 **2**]　1.2 節の問 3 の物体について以下の問に答えなさい。ただし，この物体の質量は 4 kg であったとする (答 3 。

(1) 物体に力が作用していなかったのは何秒目から何秒目までか。

(答 2　(1) 4 秒目から 8 秒目　(2) 8 秒目から 10 秒目

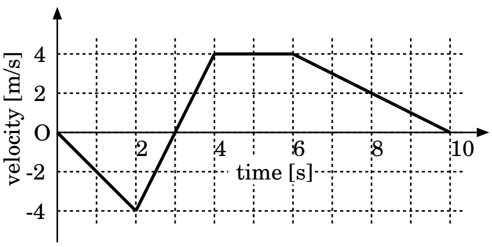
(答 3　(1) 4 秒目から 8 秒目 (2) 0 秒目から 4 秒目 (3) 8 秒目から 10 秒目 (4) 16 N (8〜10 s の間)

(2) 物体に力が正の向きに作用しているのは何秒目から何秒目までか。

(3) 物体に働く力の向きと物体の運動の向きが逆になっているのは何秒目から何秒目までか。

(4) 物体に働いた力の大きさの最大値を述べなさい。

[問 3] ある直線上を質量 2 kg の物体が運動している。その速度変化は図の通りであった。図に示した 10 秒間について以下の問に答えなさい[答4]。



(1) 10 秒後に物体は初期位置からどれだけ離れた場所にあるか。

(2) 物体の加速度を図に示しなさい。

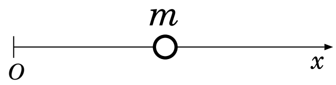
(3) 物体に力が作用していなかったのは何秒目から何秒目までか。

(4) 物体に力が正の向きに作用しているのは何秒目から何秒目までか。

(5) 物体に働く力の向きと物体の運動の向きが逆になっているのは何秒目から何秒目までか。

(6) 物体に働いた最大の力の大きさを述べなさい。

[問 4] 図のように一次元空間に外力を受けない質量 m の物体がある。物体の位置を x として以下の問に答えなさい。



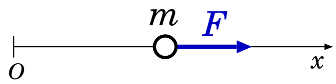
(1) 物体の運動方程式を書きなさい。

(2) 時刻 t における物体の速度を表す式を導きなさい。

(3) 物体の初速度 ($t=0$ における速度) が 0 であった場合と，$v_0(\neq 0)$ であった場合について，物体の位置変化を表す式をそれぞれ導きなさい。

(4) 位置の時間変化のグラフを，初速度により場合分けして書きなさい。

[問 5] 図のように直線上を運動する質量 m の物体に一定の力 F が働いている。物体は $t=0$ において原点に静止していた。物体の位置を x として以下の問に答えなさい。



(1) 物体の運動方程式を書きなさい。

(2) 物体の運動が等加速度運動であることを示しなさい。

(3) 時刻 t における物体の速度を表す式を導きなさい。

(4) 時刻 t における物体の位置を表す式を導きなさい。

(5) 物体の加速度，速度，位置の時間変化のグラフを書きなさい。

2.2 万有引力

[問 6] 地表の高さ (地球の中心からの距離) は場所によって異なる。また，地上の物体は地球の自転による遠心力の影響も受けている (本書**??**節参照)。このため，重力加速度の大きさは，地球上でも場所によって異なる。よって，1 つの体重計を世界各地に持っていって体重を計る

[答4] (1) 12 m (3) 4 秒目から 6 秒目 (4) 2 秒目から 4 秒目 (5) 2 秒目から 3 秒目, および 6 秒目から 10 秒目 (6) 8 N (2∼4 s の間)

と，場所によって違う体重が表示されることになる。これでは不便なので，体重計メーカは各地の重力加速度にあわせた目盛りの設定を行っている。例えば，オムロンの家庭用体重計は，日本を南北の 2 ゾーンに分けて設定を行うようになっている (カラダスキャン HBF-362 の利用説明書による)。

(1) 重力加速度が $g = 9.8$ m/s^2 の地球上で体重を測るとが 60 kgw と表示された。この体重計を、重力加速度が地球上の約 1/6 の月に持って行って体重を図ると何 kgw と表示されるだろう。
(2) 沖縄での重力加速度の大きさは約 9.789 ∼ 9.792 m/s^2, 北海道では 9.803 ∼ 9.807 m/s^2 である。北海道で体重を計ったら 60 kgw と表示された体重計を使って沖縄で体重を計ると最大何 gw の差が生じるだろう。体重計はバネを用いて身体と地球の間に働く万有引力を計るタイプのもの（通常市販されているもの）を用いるとする。
(3) 場所によらず物体の質量を正確に測定するにはどのような秤を使うのがよいだろうか?

[問 7] スペースシャトルは地表から 200∼600 km ほど上空の宇宙空間を飛び, その内部はほぼ無重力状態になっていることがしばしばテレビ等で紹介されている。飛んでいるスペースシャトルが地球から受ける万有引力の大きさはどの程度になっているのだろう。スペースシャトルが地表から 600 km の高さにあるときに地球から受ける万有引力の大きさは, 地表にあるときの何倍になるかを計算しなさい。地球の半径は約 6400 km である。

[問 8] 月の半径は地球の半径の約 1/4 である。月と地球の密度は同程度として以下の問に答えなさい (答 5 。

(1) 地球上の重力加速度の大きさを g, 地球の半径を R, 地球の質量を M, 万有定数を G とおく。g を G, M, R を用いて表しなさい。
(2) 月の質量は，地球の質量の何倍か。
(3) 月の地表における重力加速度の大きさ g_m は地球上における重力加速度の大きさ g の何倍か。

2.3 放物運動

[問 9] 質量 100 g のボールを鉛直上向きに時速 72 km/h で投げた。ボールは最高何 m の高さまで上昇するだろうか。現在開発中の新幹線の運行目標時速と同じ 360 km/h ならどうだろうか。また，質量 1 kg のボールの場合にはそれぞれどうなるか。空気抵抗は無視できるとして答えなさい (答 6 。

[問 10] 以下の大小関係を説明しなさい。空気抵抗の影響は無視すること。

(a) ボールを初速度 0 で下に落としたときに，時間 T の間に落ちる距離
(b) ボールを水平方向に速度 v_0 で投げたときに, 時間 T の間に鉛直下向きに落ちる距離
(c) ボールを鉛直上向きに速度 v_0 で投げて時間 T たった時の，重力が無い場合と重力がある場合でのボールの高さの差

(答 5 (1) $g = G\frac{M}{R^2}$ (2) 月の半径を r とおくと, 月の体積は $V_m = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{R}{4})^3$。これは地球の体積 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ の $(\frac{1}{4})^3$ 倍。よって，地球と月と密度が同じならば，月の質量は地球の $(\frac{1}{4})^3$ 倍。(3)

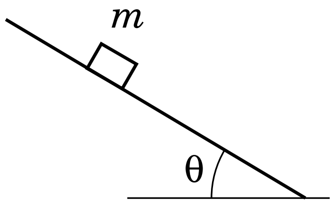
$$g_m = G\frac{m}{r^2} = G\frac{(\frac{1}{4})^3 M}{(\frac{R}{4})^2} = \frac{g}{4}$$

実際には月の密度は地球よりも小さいので，月表面での重力加速では地球上の約 1/6 倍である。

(答 6 $g \simeq 9.8$ m/s^2 をさらに近似して $g \simeq 10$ m/s^2 として計算すると 72 km/hr で投げた場合は約 20 m. 時速 360 km/hr で投げた場合は約 500 m.

2.4　力の作用・分解・合力

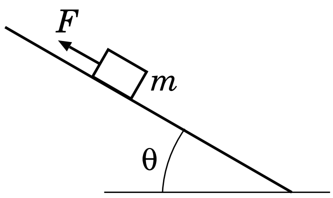
[問 **11**] 図のように傾斜角 θ の滑らかな斜面にある質量 m の物体がある。重力加速度の大きさは g とし、以下の問に答えなさい。



(1) 物体に働く重力を図中に矢印で示し，その大きさを矢印の横に書きなさい。
(2) 物体に対してはたらく重力を斜面に平行な成分と垂直な成分に分解して図示しなさい。その大きさも図に書き込みなさい。

2.5　Free-Body Diagrams と運動方程式

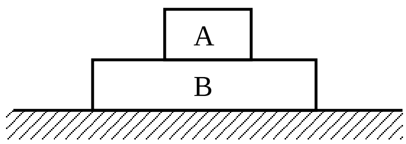
[問 **12**] 前問の物体に対して力 F を斜面と平行な向きに加えたところ物体は静止し続けた (答 7。重力加速度の大きさは g とし、以下の問に答えなさい。



(1) 物体の運動方程式を書きなさい。座標軸は斜面に平行下向きに x 軸、斜面に垂直上向きに y 軸をとりなさい。
(2) 力 F と重力はどのような関係を満たすか。
(3) 斜面の傾斜角が 30° の場合について力 F の値を求めなさい。

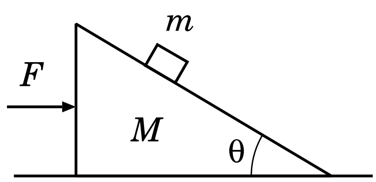
(答 7 (a) $\begin{cases} m\ddot{x} &= mg\sin\theta - F \\ m\ddot{y} &= N - mg\cos\theta \end{cases}$ (b) $F = mg\sin\theta$ (c) $F = \frac{1}{2}mg$

[問 **13**] 図のように床の上に物体 B が，さらにその上に物体 A がのって静止している。物体 A, B の質量はそれぞれ m_A, m_B である。物体 B が床から受ける力 (床反力) の大きさを N_B, 物体 A が物体 B から受ける力の大きさを N_A, 重力加速度の大きさを g とする



(1) 床および，各物体 A, B が受けている力を Free-Body Diagrams に示しなさい。
(2) 鉛直方向の運動方程式を書きなさい (答 8。
(3) N_A, N_B を求めなさい (答 9。

[問 **14**] 図のように斜面の傾斜角が θ で質量が M の三角形の台が地面においてある。この台を左から大きさ F の力で押しながら斜面に質量 m の質点を静かに置いたところ，質点は台上の同じ位置にとどまった。力の大きさ F を求めなさい。質点と斜面の間，および台と地面の間の摩擦は無視できるものとする (答 10。



(答 8 (2) $\begin{cases} A: & m_A\ddot{y}_A = N_A - m_A g \\ B: & m_B\ddot{y}_B = N_B - N_A - m_B g \end{cases}$

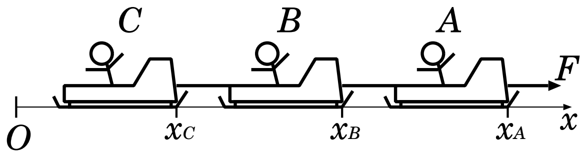
(答 9 (3) $\ddot{y}_A = \ddot{y}_B = 0$ より $N_A = m_A g$, $N_B = (m_A + m_B)g$

(答 10 $F = (M+m)g\tan\theta$ (ヒント:台と質点の運動方程式を書き，質点が台上の同じ点にとどまるときには質点と台の水平方向の加速度は等しく，質点は鉛直方向には動かないことを用いる。

3 いろいろな力と運動

3.1 糸でつながった物体の運動

[問 **1**] 図のように，ひもでつながった３個のそり A, B, C をなめらかで水平な氷の上に置き，先頭のそり A を大きさ F の力で引っぱった。各そり (ヒトを含む) の質量はそれぞれ m_A, m_B, m_C であり，重力加速度の大きさは g とする (答 11 。

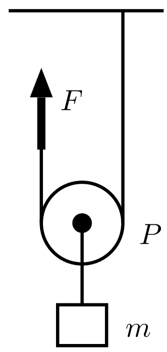


(1) A が B を引く力，B が C を引く力の大きさをそれぞれ F_1, F_2 とおく。各そりにはたらく力を Free-Body Diagrams に書きなさい。ここまでに与えられていない力は必要に応じて定義して図示すること。

(2) x 座標を図のようにとり，各そりの位置を x_A, x_B, x_C とする。各そりの x 軸方向の運動方程式を書きなさい。

(3) 各そりは連結されているのでその加速度は等しい。よって $\ddot{x}_A = \ddot{x}_B = \ddot{x}_C \equiv \ddot{x}$ とおくことができる。各そりの質量が等しい場合 $(m_A = m_B = m_C \equiv m)$ の $\ddot{x}$, F_1, F_2 を求めなさい。

[問 **2**] 図のように，天井からつり下げられた糸の一端を力 F でひっぱっており，その途中には質量と摩擦の無視できる滑車 P がある。滑車 P の軸には質量 m のおもりがぶらさがっている。滑車 P とおもり m をむすぶ糸の張力を T, 重力加速度の大きさを g であらわす (答 12 。



(1) 滑車 P とおもりに働く力を Free-Body Diagrams に図示しなさい。

(2) 滑車 P とおもり m の運動方程式をたてなさい。鉛直上向きに y 軸をとり，滑車 P とおもりの位置をそれぞれ y_P, y で表す。

(3) おもりをぶらさげている糸の張力 T を求めなさい。

(4) 力 F をどのような大きさにすれば，おもりが静止するように支えることができるか?

[問 **3**] 図のように２つの質量と摩擦の無視できる滑車 P_A, P_B がある P_A の軸には質量 m_A のおもりがぶらさがっており，P_B は天井からつり下げられている。一端を天井に固定した糸が２つの滑車を介して質量 m_B のおもりをぶらさげている。

天井とおもり m_B をむすぶ糸の張力を T，滑車 P_A とおもり m_A をむすぶ糸の張力を F_A, 滑車 P_B と天井を結ぶ糸の張力を T_F，重力加速度の大きさを g であらわす (答 13 。

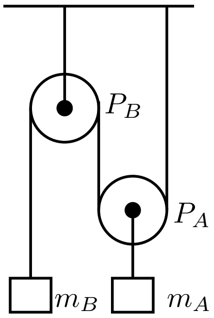
(答 11 (2) $\begin{cases} m_A\ddot{x}_A = F - F_1 \\ m_B\ddot{x}_B = F_1 - F_2 \\ m_C\ddot{x}_C = F_2 \end{cases}$

(3) $\ddot{x} = F/3m$, $F_1 = \frac{2}{3}F$, $F_2 = \frac{1}{3}F$

(答 12 (2) $\begin{cases} 0 \cdot \ddot{y_P} = 2F - T \\ m\ddot{y} = T - mg \end{cases}$

(3) $T = 2F$ (4) $F = \frac{mg}{2}$

(答 13 (2) 滑車 P_A, P_B とおもり m_A，m_B の運動方程



(1) 滑車 P_A, P_B，おもり m_A，m_B，および天井に働く力を Free-Body Diagrams に図示しなさい。

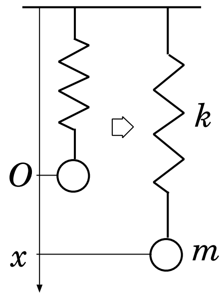
(2) 滑車 P_A, P_B とおもり m_A，m_B の運動方程式をたてなさい。鉛直上向きに y 軸をとり，滑車 P_A, P_B とおもり m_A，m_B の位置をそれぞれ y_{P_A}, y_{P_B}，y_A, y_B で表す。

(3) 天井とおもり m_B をむすぶ糸の長さが一定であることから，$\ddot{y}_A$ と $\ddot{y}_B$ にはどのような関係があるかを数式で示しなさい。

(4) ２つの物体の加速度が 0 になるのは，m_A と m_B にどのような関係があるときか。また，そのときの張力 T を m_B を使って表しなさい。

3.2 ばねによる運動

[問 4] 図のように質量を無視できるばね定数 k のばねを静かに天井からつるした。鉛直下向きに x 軸をとり，ばねが自然長のときのばねの先端の位置を原点とする。このばねに質量 m のおもりをとりつけ，ばねのつりあいの位置 (おもりが静止する位置) で静かに手をはなした (答 14。



(1) おもりに働く力を図示しなさい。

(2) おもりの運動方程式を書きなさい。

(3) 運動方程式より，つりあいの位置を求めなさい。

(4) おもりをつりあいの位置から距離 A だけ下に引っ張り，$t = 0$ に静かに手を離した。運動方程式を解き，時刻 t におけるおもりの位置と速度を求めなさい。

[問 5] ばね定数 k のばねが 2 本ある。このばねについて以下の問いに答えなさい。

(1) 2 本のばねを直列につないで，これを一つのばねと見なした場合，そのばね定数 k_s を k を使って表しなさい。

(2) 2 本のばねを並列につないで，これを一つのばねと見なした場合，そのばね定数 k_p を k を使って表しなさい。

3.3 摩擦の法則

[問 6] MKS 単位系での摩擦係数の単位を導きなさい。

[問 7] MKS 単位系での粘性定数の単位を導きなさい。

[問 8] 図の様に床におかれた物体がある。物体には力 F が水平面に対して角度 θ の上方に働いている。各物体の質量は m であり，地面

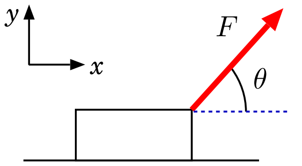
式は順に以下の通り。

$$\begin{cases} 0 \cdot \ddot{y}_{P_A} = 2T - F_A \\ 0 \cdot \ddot{y}_{P_B} = T_F - 2T \\ m_A \ddot{y}_A = F_A - m_A g \\ m_B \ddot{y}_B = T - m_B g \end{cases}$$

(3) $2\ddot{y}_A + \ddot{y}_B = 0$ (4) $m_A = 2m_B$, $T = m_B g$

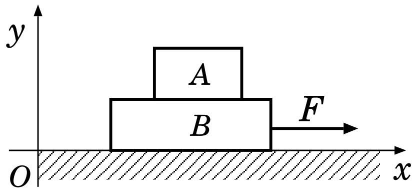
(答 14 (2) $m\ddot{x} = mg - kx$ (3) $x = mg/k$ (4) $x = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{mg}{k}$, $\dot{x} = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

と物体の間には摩擦があり，その静止摩擦係数を μ_0 とする (答 15 。



(1) 床面と物体の間にはたらく摩擦力の大きさを F_v とおいて，物体に働く力を Free-Body Diagrams に図示しなさい。
(2) xy 座標を図のようにとって，物体の運動方程式を xy 軸の各方向についてそれぞれ書きなさい.
(3) はじめ物体は静止していた。力 F を大きくしていくとある値をこえた時に動き出した。そのときの力の大きさを求めなさい。

[問 9] 図の様に 2 つの物体 A, B が重ねて置かれている。各物体の質量はそれぞれ m_A，m_B であり，地面と物体 B の間には摩擦は働かないが，物体 A と物体 B の間には摩擦が働き，その動摩擦係数を μ とする. 静止している物体 B に一定の力 F を加えたら各物体がお互いに滑りながら動きだした.　物体 A が物体 B から受ける垂直抗力を N_1，B が床から受ける力を N_2 として以下の問いに答えなさい (答 16 。



(1) 物体 A, B に働く力を Free-Body Diagrams に図示しなさい。
(2) 座標軸を図のようにとって物体 A, B の位置をそれぞれ (x_A, y_A), (x_B, y_B) で表す。運動方程式を xy 軸の各方向についてそれぞれ書きなさい.
(3) N_1, N_2 を求めなさい.
(4) 物体 A, B が受ける摩擦力の向きと大きさを各々求めなさい.

4　仕事，運動量，力学的エネルギー

4.1　力積と運動量，仕事と運動エネルギー

[問 1] テニスボール (約 60 g) を初速度 180 km/h でサーブしたい。簡単のため，静止していたテニスボールにラケットで力を与える場合を考えると，どれだけの力積をボールに与える必要があるだろうか。ボールとラケットが接触している時間は 5 ms 程度であることが知られているが，その間平均どの程度の力でボールを押せば目標の初速度を実現できるだろう (答 17 。

[問 2] チーターは静止した状態から 2 秒間で時速 70 km 程度まで加速するという報告がある。計算を単純にするために，体重 (質量)50 kg のチーターが 2 秒間一定の力で地面を水平方向に押し続けることによって時速 72 km まで加速したとして，以下の問に答えなさい (答 18 。

(答 15 (2) $\begin{cases} m\ddot{x} &= F\cos\theta - F_v \\ m\ddot{y} &= F\sin\theta + N - mg \end{cases}$

(3) $F = \dfrac{\mu_0 mg}{\cos\theta + \mu_0 \sin\theta}$

(答 16 (2) $\begin{cases} m_A\ddot{x_A} &= \mu N_1 \\ m_A\ddot{y_A} &= N_1 - m_A g \end{cases}$

$\begin{cases} m_B\ddot{x_B} &= F - \mu N_1 \\ m_B\ddot{y_B} &= N_2 - N_1 - m_B g \end{cases}$

(3) $\begin{cases} N_1 &= m_A g \\ N_2 &= m_A g + m_B g \end{cases}$

(4)A は x 軸の正の向き大きさ $\mu m_A g$ の摩擦力を，B は同じ大きさの摩擦力を x 軸の負の向きにうける。

(答 17 ボールの質量を m, ボールの初速度を v, 加えた力を F, 力を加えた時間を Δt とすると $F\Delta t = mv - m\cdot 0$)。よって、$F = mv/\Delta t = 0.06[\mathrm{kg}] \times 180 \times (1000[\mathrm{m}]/3600[\mathrm{s}])/0.005[\mathrm{s}] = 600[\mathrm{N}]$

(答 18 (1) 500 N (2) 20 m

(1) チーターが加速のために出す力を求めなさい。
(2) チーターが静止状態から時速 72 km に加速する間に進む距離を求めなさい。

[問 3] 卵を同じ高さからやわらかい粘土の上とコンクリートの上に落としてみた。卵は粘土に落としたときは割れなかったが，コンクリートに落とすと割れてしまった。衝突時の様子を観察したところ粘土に落としたときのほうが衝突時間 (衝突してから卵が動かなくなるまでの時間) が長かった。また，いずれの場合も卵がはねかえることはなかった。以下の各項目の大きさは，卵が粘土上とコンクリート上のいずれに落ちた場合の方が大きい (もしくは同じ) か[答 19]。

(1) 卵の衝突前後 (衝突直前と衝突後動かなくなった瞬間) の運動量の変化
(2) 卵が衝突により受けた力積
(3) 卵が衝突時 (衝突してから卵が動かなくなるまで) に床から一定の力を受け続けたと仮定した場合の，その力の大きさ

[問 4] 同じ質量 m の 2 つのボールを鉛直上方と鉛直下方に同じ速さ v_0 で同時に投げた[答 20]。

(1) 2 つのボールが投げ出されてから同じ距離 L すすむまでの間について，以下の各項目の値は上方と下方のどちらに投げたボールのほうが大きいか (もしくは等しいか)。
  (a) 重力がボールに与えた力積の大きさ
  (b) 重力がボールにした仕事の大きさ
  (c) 運動量の変化の大きさ
  (d) 運動エネルギーの変化の大きさ
(2) 2 つのボールが投げ出されてから時間 T たつまでの間について，以下の各項目の値は上方と下方のどちらに投げたボールのほうが大きいか (もしくは等しいか)。ただしこの間，ボールはそれぞれ一定の方向に進んでいたとする。
  (a) 重力がボールに与えた力積の大きさ
  (b) 重力がボールにした仕事の大きさ
  (c) 運動量の変化の大きさ
  (d) 運動エネルギーの変化の大きさ

[問 5] MKS 単位系で以下の単位を表しなさい。

(1) 仕事
(2) 力積
(3) 運動エネルギー (略号も述べよ)
(4) 運動量

4.2 力学的エネルギー

[問 6] 重力の影響下で運動を行う質点の速度は以下のいろいろな方法で求めることができる。時刻 $t = 0$ における速度 $v(0)$ が与えられたときに，時刻 t における速度 $v(t)$ をそれぞれどのように求めることができるか，具体的に数式を用いて説明しなさい。

(1) 力積が運動量の変化に等しいことを利用する。
(2) 運動方程式を積分する。
(3) 時刻 t までに距離 x 動いたことがわかっているならば，力学的エネルギーが保存することを利用する。

[問 7] 質量 100 g のボールを 5m 鉛直上空 (手を離れてからの距離) に投げ上げたい。投球動作中に重力がボールに与える影響は無視し，重

[答 19] ヒント) 卵が床に衝突したときの接触時間と受ける力の大きさを適当に仮定して考える。

[答 20] (1a) 上方 $\cdots$ どちらが距離 L すすむのに時間がかかるか考えよ。(1b) 等しい (1c) 上方 (1d) 等しい (2a) 等しい (2b) 下方 $\cdots$ どちらが時間 T の間に進む距離が長いか考えよ。(2c) 等しい (2d) 下方

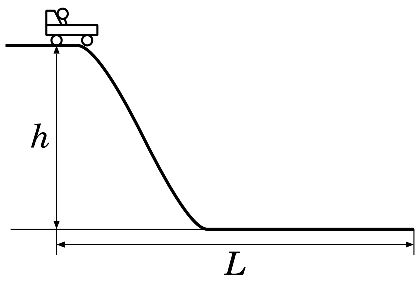
力加速度の大きさを $g \simeq 9.8$ m/s^2 として以下の問に答えなさい。計算は概算でよい (答 21 。

(1) ボールに与えるべき初速度を求めなさい。
(2) 投球動作中に手が 50cm 移動する間，一定の力をボールに与え続けることができるとする。この間にボールに加えるべき力を求めなさい。
(3) ボールに力を加えることができる時間が 0.05 秒間であった場合について，ボールに与えるべき力を求めなさい。

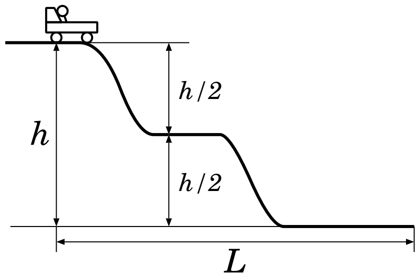
[問 8] 東京サマーランドのフリーフォールは高さ約 40 m の高さからの自由落下を味わえるそうです。フリーフォールが一番低くなるときの高さを地上の高さとし，重力加速度の大きさを $g \simeq 9.8$ [m/s^2] として以下の問に答えなさい (答 22 。

(1) 位置エネルギーの基準点を地上の高さにした時，体重 (質量)50 kg の人が高さ 40 m の位置にいる時の位置エネルギーを求めなさい。
(2) 40 m の高さで静止している体重 (質量)50 kg のヒトが地上まで自由落下したときの運動エネルギーはどれだけか?
(3) 乗物の地上での速度を秒速と時速で求めなさい。
(4) 40 m の自由落下にかかった時間 [s] を求めなさい。

[問 9] 図のようにジェットコースターが高さ h の斜面をすべり降りる 2 つのコースがある。コース全体の長さおよび斜面の水平方向の長さはいずれのコースも同じである。斜面に摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい (答 23 。



(a)



(b)

(1) 各コースについて、ジェットコースターが静止した状態からスタートし、高さ h をすべり降りた時の速さを求めなさい。
(2) 水平距離 L を移動するのに要する時間はいずれのほうが短いだろうか?

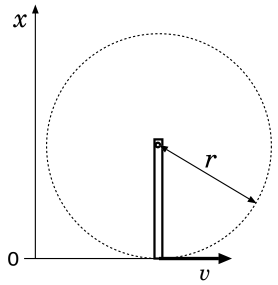
[問 10] 図のように，質量の無視できる長さ r の棒の一端に質量 m のおもりをつけ，他端に軸を通して棒が円直面内で自由に回転できるようにしてある。おもりを軸の真下の位置から速さ v_0 で動かしたところ，おもりは鉛直な平面内で回転運動をはじめた。鉛直上向きに x 軸をとり，原点は軸の真下に棒の端がきたときの

(答 21 (1) 10 m/s (2) 10 N (3) 20 N

(答 22 (1) 19600 J (2) 19600 J (3) 約 28 m/s = 100.8 km/hr (エネルギー保存則を使う。体重と無関係に落下速度は決まることに注意) (4) 2.9 s (運動量の変化と力積の関係を使うと便利。運動方程式から出発してももちろん OK)

(答 23 (1) すべり降りたときの速さを v とおく。本問のように運動の向きが途中で変わる場合にも力学的エネルギー保存則は成り立つので，(a)(b) のいずれの場合も $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ が成り立つ。よって $v = \sqrt{2gh}$ (2) コース (b) において高さ $\frac{h}{2}$ の部分を移動する時の速度が，水平距離 L 動くのに要する時間にどう影響するかを考えてみよ。

位置とする。軸の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えなさい。重力加速度の大きさは g とする[答 24]。

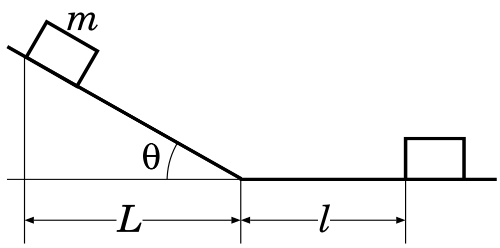


(1) おもりが軸の真上に達した瞬間の重りの速さ v を求めなさい。

(2) 棒を一回転させるためにおもりの初速度 v_0 が満たすべき条件を求めなさい。

4.3 摩擦力と力学的エネルギー

[問 11] 図のように，角度 θ 傾いた板の上に質量 m の物体を静かにおいたところ滑べり降りていった。物体と斜面の間には摩擦はないが，物体と地面との間には摩擦が働き，その動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさは g とする[答 25]。



(1) 物体が斜面上にあるときについて，以下の問に答えよ。

（a）物体およびに斜面に働く力をそれぞれ Free-Body Diagrams に示しなさい。

（b）斜面方向の物体の運動方程式を書きなさい。

（c）物体はすべりはじめてから水平距離 L 進んで地面に到達した。この瞬間の速度を以下の 2 つの方法より求めなさい。

(i) 運動方程式の時間積分により

(ii) エネルギー保存則より

(2) 物体は地面まで落ちた後，さらに距離 l 進んで静止した.

（a）物体のもっていた力学的エネルギーは，どのようなエネルギーに変わったか。

（b）摩擦力が物体にした仕事を

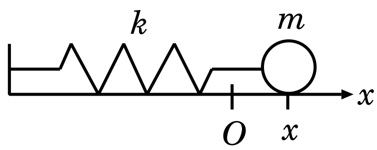
(i) μ を使って表しなさい。

(ii) μ を使わずに表しなさい。

（c）μ を l と L を使って表しなさい。

4.4 ばねと力学的エネルギー

[問 12] 壁に一端を固定したばね (ばね定数 k) にとりつけられた質量 m の質点が，滑らかな水平面上で振動している。原点 O をばねの自然長の位置として以下の問に答えよ.



(1) 物体の運動方程式を書きなさい。

(2) 運動方程式より，任意の時刻において力学的エネルギーの総和が常に一定であることを示しなさい。

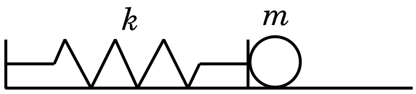
[答 24] (1) 力学的エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2$. これを解いて $v = \sqrt{v_0^2 - 4gr}$ (2) 前問で求めた v が実数でないといけないので，$v_0 \geq 2\sqrt{gr}$

[答 25] (1b) 斜面と平行下向きに x 軸をとると物体の運動方程式は $m\ddot{x} = mg\sin\theta$ (1c) $v = \sqrt{2gL\tan\theta}$ (2 (b) i) $-\mu mgl$ (2 (b) ii) $-mgL\tan\theta$ (2c) $\mu = \frac{L}{l}\tan\theta$

[問 **13**] 以下の問いに答えなさい (答 26 。

(1) ばね定数 k のばね 2 本を直列につないだ。このばね全体のばね定数を求めなさい。
(2) ばね定数 k のばね 2 本を並列につないだ。このばね全体のばね定数を求めなさい。

[問 **14**] 図のように，ばね定数 k のばねの端に質量 m の小球が置いてある。小球を押してばねを L だけ自然長から縮め，その後手を放したら小球はばねに押されて飛び出していった。ばねの質量や摩擦は無視できるとして以下の問に答えなさい (答 27 。

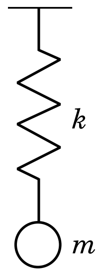


(1) 小球を押して，ばねを L だけ自然長から縮めたときのばねの弾性エネルギーを求めなさい。
(2) 小球が飛び出したときの速度を求めなさい。

[問 **15**] 図のように，鉛直面内につるしたばね (ばね定数 k) に質量 m の質点 M をとりつけた。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。

(答 26 (1) ばね一本に力 F を加えた時のばねののび Δx とすると，$k = F/\Delta x$。直列に繋いだばねに力 F を加えた場合，2 本のばね両方に力 F が伝わるので，のびの合計は $2\Delta x$。この場合のばね定数を k_s と置くと，$F = 2\Delta x k_s$ となるので，$k_s = F/(2\Delta x) = k/2$。(2) 前問と同様に，並列に繋いだばねに力 F を与えた場合を考える。ばね全体の伸びを $\Delta x'$，ばね定数を k_p とおくと，$F = k\Delta x' + k\Delta x' = 2k\Delta x' = k_p\Delta x'$。よって $\Delta x' = F/(2k) = \Delta x/2$, また，$k_p = F/\Delta x' = 2F/Deltax = 2k$

(答 27 (1) $\frac{1}{2}kL^2$ (2) 求める速度を v とおくと力学的エネルギー保存則より $\frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}mv^2$. よって $v = L\sqrt{\frac{k}{m}}$



(1) 質点の運動方程式を書きなさい。
(2) 運動方程式より， 鉛直方向の単振動において力学的エネルギーの総和が常に保存していることを示しなさい。
(3) この質点の運動に粘性抵抗も存在する場合について運動方程式を書き，時刻 t における質点の位置と速度を求めなさい。また，その時間変化について説明しなさい。

5 力を及ぼしあう質点の運動

[問 **1**] 以下の問に答えなさい。

(1) 打ち上げ花火は爆発したあと，その重心位置はどのように移動するか。
(2) ロケットを打ち上げたとき，ロケットとその噴射物および地球の重心位置はどのように変化するか。

[問 **2**] 一直線の溝の上の 3 つの物体 A, B, C がある。はじめ静止していた物体 B に，速度 v で滑ってきた物体 A が衝突して 1 つの固まりになって滑り出した。その固まりは，静止している物体 C に衝突してさらに大きな 1 つの固まりとなって滑っていった。物体 A,B,C の質量はそれぞれ m_A, m_B, m_C とし，各物体および固まりの回転運動や摩擦は無視できるとして以下の問に答えなさい (答 28 。

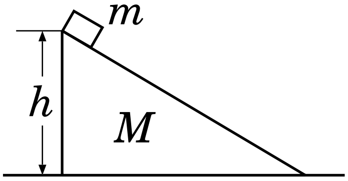
(1) はじめ物体 A のみが動いていたときの，

(答 28 (1) $\frac{m_A v}{m_A+m_B+m_C}$ (2) $\frac{m_A v}{m_A+m_B+m_C}$

A,B,C の全体の重心の速度を求めなさい。

(2) 3 つの物体が衝突して固まりとなったときの速度を求めなさい。

[問 3] 図のように質量 M の三角形の台の高さ h の位置に質量 m の質点を静かに置いたところ，この質点は斜面を滑り落ちていった。重力加速度の大きさを g とし，質点と斜面の間の摩擦は無視できるとする (答 29 。



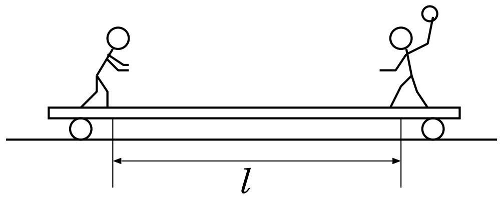
(1) 台が地面に固定されているとき，質点が地面に到達した瞬間の速さ v_1 を求めなさい。

(2) 台と地面の間に摩擦がない時，質点が地面に到達した後の台と質点の速度 (それぞれ V と v_2) を求めなさい。ただし，質点が台上から地面に移ったときには力学的エネルギーの損失はなかったものとする。

(3) v_2 のある値の極限として v_1 を求めることが出来る。このことを説明し，実際に求めてみなさい。

[問 4] 台車の上にＡ君とＢ君が距離 l 離れて立って，キャッチボールをはじめた。Ａ君，Ｂ君，ボール，台車の質量はそれぞれ M_A, M_B, m, M である。台車と地面の間の摩擦は無視するが，Ａ君やＢ君が足を滑べらすことはないとする。

はじめ台車は静止していた。Ａ君がＢ君へ向かってボールを投げた。地上に立っているヒトがボールを見たところ，その初速度は v_0, 水平面となす角は θ であった。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。

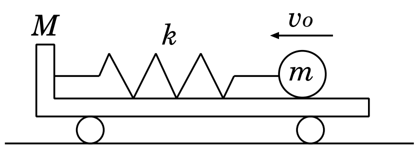


(1) Ａ君がボールをなげ，Ｂ君が受け取るまでの間，台車の速度はどのような値になるか？

(2) ボールの初速度 v と角度 θ はどのような条件を満たしていると，Ｂ君は移動せずにボールを受け取ることができるか？

(3) Ｂ君がボールを受け取った後の台車の速度を求めよ。

[問 5] 図のように，質量 M の台車の上にばね係数 k のばね (質量は無視できる) の一端が固定されている。はじめ台車は静止しており，ばねは自然長であった。このばねのもう一端には，質量 m の質点が固定されている。ばねが縮む方向に瞬間的に力を加えたところ，質点は初速度 v_0 で動き出した。ばねや質点と台車の間の摩擦，および台車と地面の間の摩擦は無視して以下の問に答えよ。



(1) ばねが最短の長さに達したとき，自然長との差は l であった。v_0 を l を使って表せ。また，この瞬間の台車の速度を求めよ。

(2) ばねが再び伸び，長さが最大になった瞬間の質点と台車の速度を求めよ。

(答 29 (1) $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$ より $v_1 = \sqrt{2gh}$ (2) $\begin{cases} mgh &= \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV \\ 0 &= mv_2 - MV \end{cases}$ より v_2 と V を求める。(3) 前問で求めた v_2 に対して $M \to \infty$ の極限をとれば (1) の答と一致する。

6　円運動

6.1　弧度法

[問 1] 以下の問に答えなさい (答 30 。

(1) 360° は何ラジアンか。

(2) 1 ラジアンは度数法では何度程度か。以下から選びなさい。

30°　60°　90°　180°

(3) 半径 2 m，中心角 1 rad の円弧の長さは何 m か？

(4) 半径 r ，中心角 θ [rad] の円弧の長さは？

[問 2] 以下の問に答えなさい (答 31 。

(1) 以下の直交座標 (x, y) で表される点を図示しなさい。また，それぞれを極座標 (r, θ) で表しなさい。
　(a) $(1, 0)$
　(b) $(-1, -1)$
　(c) $(-1, \sqrt{3})$

(2) 以下の極座標 (r, θ) で表される点を図示しなさい。また，それぞれを直交座標で表しなさい。
　(a) $(2, \dfrac{\pi}{3})$
　(b) $(4, -\dfrac{\pi}{4})$
　(c) $(0, 3)$

[問 3] 角度をラジアン [rad] で表すとき，角速度と角加速度の単位を述べなさい (答 32 。

[問 4] 位置の極座標表現 (r, θ) と直交座標表現 (x, y) の関係式を書きなさい (答 33 。

(答 30　(1) 2π rad　(2) 60°　(3) 2m　(4) $r\theta$ [rad]

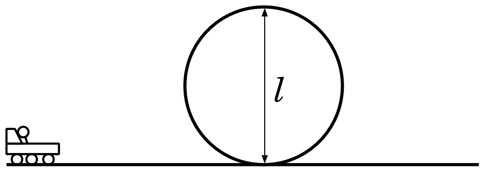
(答 31　(1)(a) $(1, 0)$　(b) $(\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi)$　(c) $(\sqrt{2}, \frac{2}{3}\pi)$
(2)(a) $(1, \sqrt{3})$　(b) $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$　(c) $(0, 0)$

(答 32　角速度は [rad/s], 角加速度は [rad/s^2]

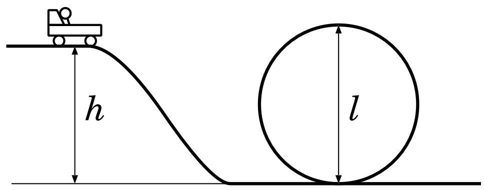
(答 33　$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

6.2　円運動

[問 5] 宙返りをするおもちゃのジェットコースターのコースが図のように 2 つある。宙返りの部分は直径 $l = 50$ cm の円軌道となっている。重力加速度の大きさを $g \simeq 9.8$ m/s^2 として以下の問に答えなさい (答 34 。



(a)



(b)

(1) 宙返り部分においてジェットコースターに対して向心力として働く力はなにか？

(2) 図 (a) のコースにおいて，宙返りを成功するために必要なジェットコースターの初速度の最小値を求めなさい。

(3) 図 (b) のコースにおいて，宙返りを成功するために必要なジェットコースターの始めの高さ h の最小値を求めなさい。はじめジェットコースターは静止しているとする。

[問 6] 赤道付近にいる A 君 (体重 60 kgw) が，地球の自転によって感じる遠心力と，万有引力によって地球に引き付けられる力の大きさを求め，その大小を比べなさい。

赤道付近で用いられる重力加速度の大きさ g は，実はこの万有引力と遠心力の差によって与

(答 34　(1) 3.5 m/s (2) $h = \dfrac{5}{4}l = 62.5$ cm

えられる加速度である。

7　剛体の運動

[問 1] 質量分布が一様な長さ l，質量 m の棒の慣性モーメントを考える。棒の中心まわりの慣性モーメントを I_c，棒の端点まわりの慣性モーメントを I_t，棒の重心の位置に棒の質量が全て集まってると仮定した場合の端点まわりの慣性モーメントを I_M とする。このとき $I_t = I_M + I_c$ が成り立つことを示しなさい。

[問 2] 一様に質量 m が分布した長さ l の棒の一方に質量 M の質点がついている。慣性モーメントを以下の各場合について求めよ。質量分布は棒の各部分で一定とする。

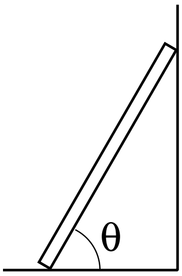
(1) 棒の中心まわりの慣性モーメント

(2) 質点のない端点まわりの慣性モーメント

(3) 質点のある端点まわりの慣性モーメント

[問 3] 半径 r，質量 m の円盤について，その中心点まわりの慣性モーメントを求めよ。質量分布は円盤の各部分で一定とする。

[問 4] 図のように，質量 m が一様に分布した長さ l の棒が壁に立てかけてある。棒と床，棒と壁には各々静止摩擦が働き，その静止摩擦係数は μ である。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。

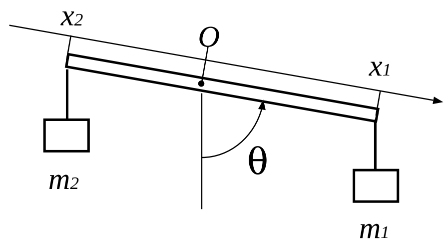


(1) 静止している棒に働く力を図示しなさい。必要に応じて各力を表す記号を定義して用いること。

(2) 棒の重心の並進方向の運動方程式を書きなさい。

(3) 棒の重心周りの慣性モーメントを I として，重心周りの回転方向の運動方程式を書きなさい。

[問 5] 下図のように，質量の無視できる棒の両端に質量 m_1 と m_2 の物体をぶら下げてある。棒の回転軸を原点とし，棒に沿って x 軸をとって，m_1, m_2 の位置をそれぞれ x_1, x_2 で表す。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。ただし，重りはつねに棒の端の真下にぶらさがっているとする。

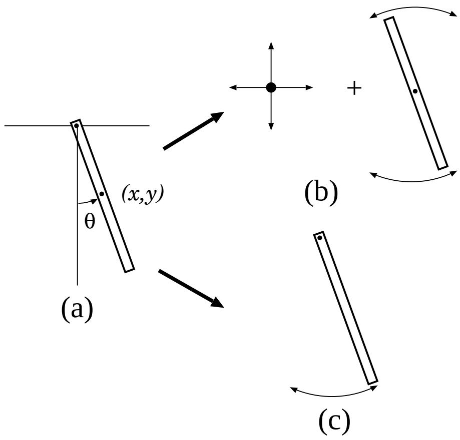


(1) 棒に働く力を図示しなさい。

(2) 回転軸周りの棒の回転運動の運動方程式を求めなさい。

(3) 回転軸にモータを取り付け，棒にトルク τ を与えた時の棒の運動方程式を求めなさい。

[問 6] 端を回転軸とする一様に質量 m が分布した長さ l の棒が垂直面内でゆれている (図 (a))。棒が鉛直線となす角を θ とおく。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えなさい。



(1) 重心の座標を (x, y) とおく。(x, y) と θ の関係式を書きなさい。

(2) 棒の運動は，重心の並進運動と重心回りの回転運動の和と捉えることができる (図 (b))。このことから，棒の運動エネルギーの総和を求めよ。

(3) 棒の運動を，回転軸回りの回転運動と捉えることもできる (図 (c))。このことを用いて，棒の運動エネルギーおよび，θ に関する運動方程式を求めよ。また，それらの結果が前問と一致することを確認しなさい。

付録 A　力学の重要ポイント

(1) 運動の 3 つの基本法則を説明出来る。

(2) Free-Body Diagrams を描くことができる。

(3) Free-Body Diagrams に基づき，運動方程式を書くことができる。

(4) 運動方程式を積分することによって物体の位置の時間変化を表す式を導ける。

(5) 運動方程式から、運動量と力積の関係式と運動量保存則を導ける。

(6) 位置エネルギーの定義を説明でき，基準点の位置や座標軸の向きに応じて正しく導出できる。

(7) 運動方程式から、力学的エネルギーと仕事の関係式と力学的エネルギー保存則を導ける。

(8) 物体の重心をどのように定義すべきかを説明できる。

(9) 剛体の慣性モーメントの算出方法を説明できる。

(10) 剛体の運動についての運動方程式を書くことができる。

付録 B　力学問題の解法

(1) 準備: 運動方程式により解くか、保存則を使うかを考える。

(2) 解法

　（a）運動方程式により解く場合

　　(i) 物体に働く力を Free-Body Diagrams に書く

　　(ii) 運動方程式を書く

　　(iii) 拘束条件を式に書く (例:複数の物体が糸で結ばれてるならばその位置や加速度に対する拘束を式にする。)

(iv) 未知数を求めるために十分な式があるかを確認する
(v) 運動方程式を積分計算によって解く

（b）保存則によって解く場合
(i) 保存する量が何かを考え、保存則による式を書く
(ii) 拘束条件を式にする
(iii) 未知数を求めるために十分な式があるかを確認する
(iv) 連立方程式をがんばって解く

(3) 解の確認
（a）解の単位があっているかを確認する
（b）いくつかの変数について様々な値を想定し，その値に応じて予想される結果と、計算で求めた解が定性的にあっているか確認する
（c）解を容易に推定できるような定数値の設定を考え、その推定値と計算で求めた解が定量的に等しいかを確認する
（d）異なる解法を考え、その解法で解いてみる